Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2012

Parte 1 – 24/04/2012

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

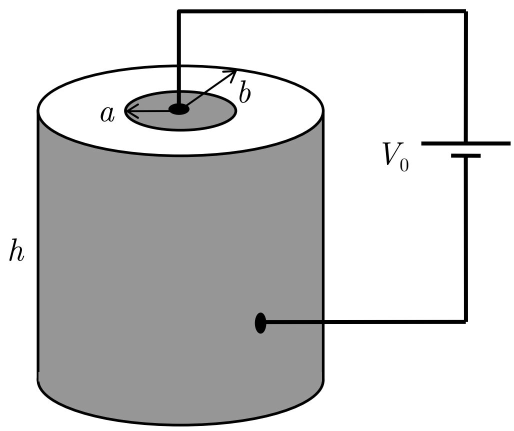
Q1. Um cilindro de altura h e raio externo b é feito de um material com condutividade elétrica σ e permissividade elétrica ε. O cilindro é furado ao longo de seu eixo de forma que seu raio interno é a. Um material de alta condutividade elétrica preenche o furo central do cilindro e forma também uma casca cilíndrica em torno da sua borda externa, formando os contatos elétricos do cilindro, conforme ilustra a figura abaixo. Considere $h >> b$, de modo que os efeitos de borda podem ser desprezados. Aplica-se uma diferença de potencial elétrico V_0 entre esses contatos (tome $V = 0$ na superfície externa do cilindro).

(a) Mostre que, no regime estacionário ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), a densidade de carga no interior do meio condutor homogêneo é nula.

(b) Mostre que, nesse caso, o potencial elétrico obedece à equação de Laplace e obtenha o vetor campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ no interior do cilindro.

(c) Calcule a carga livre total acumulada na superfície do contato interno (raio a) e a capacitância entre os dois contatos elétricos.

(d) Calcule a resistência elétrica entre esses dois contatos elétricos.



Q2. Um cilindro condutor muito longo de raio a conduz uma corrente I ao longo de seu eixo z. A densidade de corrente $\vec{J}$ no interior do cilindro varia de acordo com a expressão abaixo:

$$\vec{J}(r,\varphi,z) = \hat{z}\,\frac{J_0}{r}\,sen\left(\frac{\pi r}{a}\right),$$

onde r é a distância radial entre o ponto considerado e o eixo do cilindro.

(a) Determine a constante J_0 em termos de I e a.

(b) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ fora do cilindro condutor ($r > a$) e expresse seu resultado em termos de I e a.

(c) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ no interior do cilindro condutor ($r < a$) e expresse seu resultado em termos de I e a.

(d) Esboce um gráfico qualitativo do módulo do campo magnético, $B(r)$, indicando seu comportamento em $r = 0$ e $r = a$.

Q3. (a) Utilize a relação de de Broglie para o comprimento de onda associado a uma partícula e obtenha a relação de quantização do momento angular de um elétron em movimento orbital atômico, no modelo de Bohr ($L = n\hbar$, com n=1, 2, 3, ...).

(b) Use a expressão acima para mostrar que as energias associadas aos estados eletrônicos permitidos em um átomo de hidrogênio são dadas por

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \ ,$$

onde e e m_e são a carga e a massa do elétron, respectivamente.

(c) Calcule a energia de ionização do Lítio duplamente ionizado ($Z = 3$) sabendo que a energia de ionização do hidrogênio é 13,6 eV.

(d) Em espectroscopia, a série de Balmer está associada a um subconjunto de transições nas quais o elétron do átomo de H vai de um estado excitado ao estado final caracterizado por $n_f = 2$. Nesta série, a linha denominada por H_β corresponde a transição a partir do estado com $n_i = 4$. Estime o comprimento de onda da linha H_β e situe a mesma em alguma região do espectro eletromagnético.

Q4. Em um experimento de efeito fotoelétrico, a Figura 1 abaixo mostra um possível gráfico da corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial V entre o coletor de elétrons e um alvo de sódio. As curvas (a) e (b) correspondem a diferentes intensidades da luz incidente e V_0 é o chamado "potencial de corte" ou "potencial limite". Já a Figura 2 mostra medidas do potencial limite em função da frequência da luz incidente. Utilizando esses gráficos:

(a) estime o valor da constante de Planck em eVs, indicando o procedimento utilizado;

(b) estime o valor da "função trabalho" para o sódio;

(c) estime o valor da energia cinética do mais rápido fotoelétron emitido quando o alvo de sódio é atingido por luz de frequência 10^{15} Hz;

(d) cite uma característica do efeito fotoelétrico que pode ser explicada classicamente e outra que não se pode explicar utilizando a teoria ondulatória do eletromagnetismo.

Figura 1

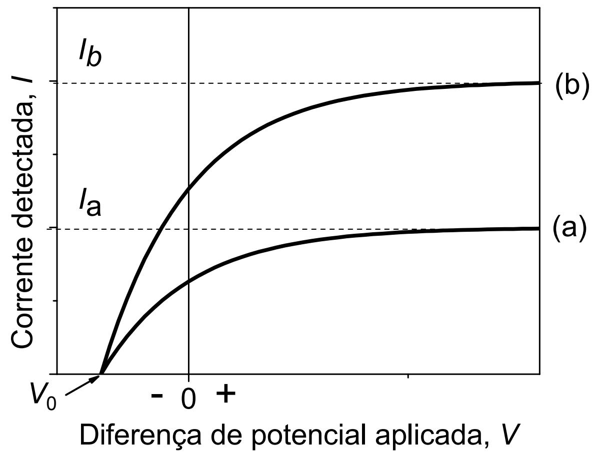
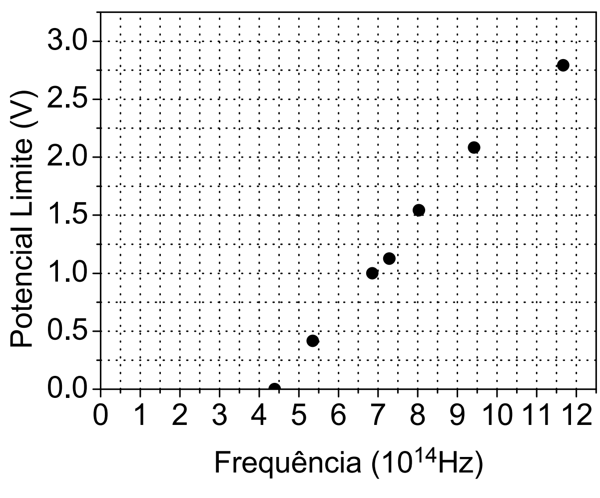


Figura 2



Q5. Dois corpos idênticos de capacidade térmica constante C_P (finita) estão nas temperaturas T_1 e T_2, respectivamente, sendo $T_2 > T_1$. Considere que nos processos descritos abaixo os corpos permanecem a pressão constante e não sofrem mudança de fase.

(a) Se os corpos forem colocados em contato, mas isolados termicamente do resto do universo, determine a temperatura de equilíbrio.

(b) Determine a variação de entropia do sistema no processo descrito no item (a).

Considere agora que os corpos funcionem como fontes quente e fria para uma pequena máquina térmica, a qual irá funcionar até que os dois corpos atinjam o equilíbrio térmico.

(c) Supondo que esse processo seja reversível, determine a temperatura final de equilíbrio neste caso.

(d) Calcule a quantidade de trabalho produzida pela máquina térmica no processo descrito no item (c).

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2012

Parte 2 – 25/04/2012

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas**.
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Um corpo celeste de massa m se aproxima do Sol (massa $M >> m$) seguindo uma trajetória hiperbólica e quando está a uma distância r_0 dele, a sua velocidade é v_0 e faz um ângulo de 30° com o raio vetor ao Sol.

(a) Calcule o momento angular L e a energia E desse corpo celeste.

(b) Determine a distância r_p de máxima aproximação do corpo celeste ao Sol, expressando o seu resultado em termos de L e E.

(c) Quando o corpo celeste atinge a distância r_p de máxima aproximação, sofre um choque com um pequeno asteróide de tal maneira que sua massa não varia, porém ele passa a descrever órbita circular de raio r_p no mesmo plano da órbita anterior. Calcule a nova energia e o novo momento angular do corpo celeste após a colisão, expressando o seu resultado em termos de r_p.

Q7. Uma bola de massa $m = 450$ g está presa a uma mola cuja energia potencial em função da elongação x está mostrada na figura abaixo (linha sólida). Expresse as respostas no SI.

(a) Determine a constante elástica da mola, para pequenos deslocamentos.

(b) Esboce um gráfico da força que atua sobre essa bola em função da elongação da mola.

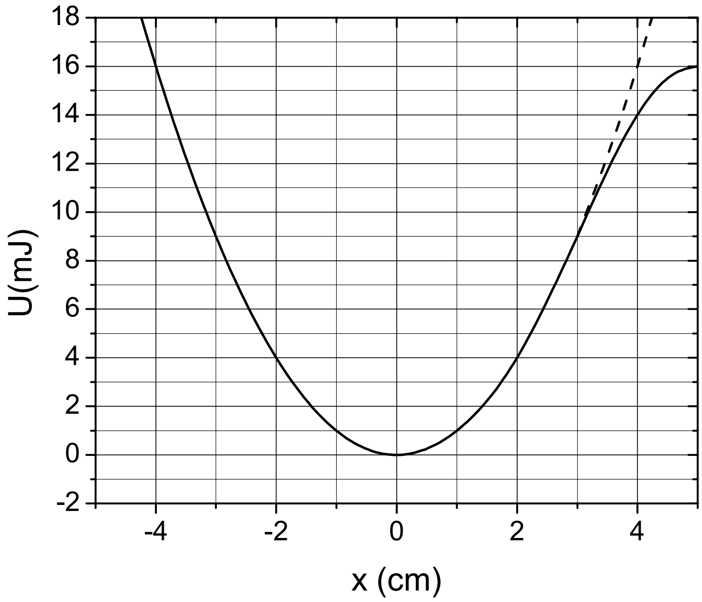
Sabendo que o movimento da bola é unidimensional e sua elongação máxima é de 3 cm:

(c) determine sua velocidade máxima;

(d) determine a energia cinética da bola nesse movimento para a elongação da mola

$\mathsf{x} = -2$ cm;

(e) Determine a posição ($\mathsf{x} < 0$) em que a bola deve ser solta a partir do repouso para atingir o ponto $\mathsf{x} = 5$ cm com velocidade nula.



Q8. Considere o problema unidimensional quântico de uma partícula de massa m sujeita ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ 0 & , 0 < x < a \\ +\infty & , x > a \end{cases} .$$

(a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para este problema.

(b) Resolva a equação, achando todas as soluções aceitáveis independentes. Isto é: determine todos os valores possíveis para a energia, E_n, e as funções de onda normalizadas correspondentes, $\psi_n(x)$.

Suponha agora que, na verdade, o potencial total tenha a forma $V_{\text{total}}(x) = V(x) + W(x)$, sendo $W(x)$ uma pequena correção dada por

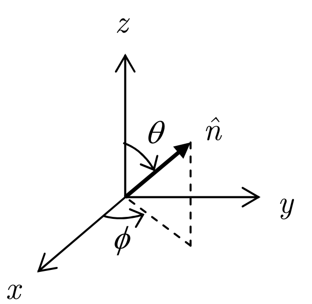
$$W(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ W_0 \,\text{sen}(\pi x/a) & , 0 < x < a \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

(c) Usando teoria de perturbações de primeira ordem, calcule a correção para a energia do estado fundamental obtida no item anterior.

Q9. Para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ o operador de spin é dado por $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, onde

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são as matrizes de Pauli. Seja $\hat{n}$ o vetor unitário na direção de ângulos (θ, ϕ), conforme ilustra a figura abaixo.



(a) Calculando o produto escalar, mostre explicitamente que o operador que representa a componente do spin nessa direção, $S_n = \hat{n}\cdot\vec{S}$, é dado por

$$S_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\,\text{sen}\,\theta \\ e^{i\phi}\,\text{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} .$$

(b) Mostre que os únicos valores que podem ser obtidos numa medida de S_n são $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, qualquer que seja a direção $\hat{n}$.

(c) Obtenha o vetor coluna normalizado que representa o estado no qual uma medida de S_n produz necessariamente o valor $+\hbar/2$. Simplifique a resposta final expressando a dependência em θ em termos de $sen(\theta/2)$ e $cos(\theta/2)$.

(d) Suponha, agora, que $\theta = 60°$ e $\phi = 45°$. Se a partícula for preparada de tal forma que a componente z do spin, S_z, tenha o valor bem definido $+\hbar/2$, qual é a probabilidade de obter-se esse mesmo valor numa medida de S_n? *Dê a resposta numérica.*

Q10. Considere um gás composto por N partículas ultrarrelativísticas (de forma que sua energia ε possa ser escrita como $\varepsilon = c\,p$, onde p é o seu momento linear) confinado em um recipiente de volume V e a temperatura T. Suponha que as partículas sejam indistinguíveis e não interagentes, e que sua energia térmica seja suficientemente alta para desprezar efeitos quânticos.

(a) Mostre que a função de partição do gás é $Z = \dfrac{(8\pi V)^N}{N!\,(hc/k_B T)^{3N}}$, onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo e k_B é a constante de Boltzmann.

(b) Determine a pressão do gás.

(c) Calcule a entropia do gás.

(d) Determine a energia interna do gás.