

AGA215- LISTA AULAS 25 e 26(11/11/2019) -Entregar dia 18/11/2019 (dia da prova)
COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA E BIG-BANG

Nome: GABARITO

Verdadeiro e Falso (2 pontos)

1. (✓) Um universo crítico é geometricamente plano.
2. (✓) Obedecendo ao princípio cosmológico, um universo aberto pode possuir geometria de Lobachevski.
3. (F) A luz emitida por todas as estrelas no universo ultrapassa em energia total a radiação cósmica de fundo.
4. (✓) O tempo entre o começo do Big-Bang e $t \sim 10^{-43}$ s não dá para ser descrito fisicamente por causa da falta de uma teoria quântica da gravitação.
5. (F) No começo da era GUT ocorre a separação entre as forças nucleares forte e fraca.
6. (✓) Toda a matéria visível no universo pode ser descrita em termos de léptons e quarks e as forças que atuam entre eles.
7. (✓) No final da era hadrônica ocorre o total confinamento dos quarks para formar prótons, nêutrons e outras partículas.
8. (✓) Quando um elétron é formado numa colisão de raios gama um pósitron também é formado.
9. (✓) Deutério e Hélio são formados durante a era nuclear.
10. (F) Nucleossíntese primordial refere-se a todos os elementos formados até o ferro durante o Big-Bang.
11. (F) Desacoplamento refere-se às interações entre matéria e anti-matéria no final da era da radiação.
12. (✓) O problema de horizonte relaciona-se com a homogeneidade e isotropia da radiação cósmica de fundo.

Completar o que falta (3 pontos)

1. GRAVIDADE tende a desacelerar a expansão do universo.
2. ENERGIA ESCURA tende a acelerar a expansão do universo.
3. Com a energia escura levada em conta, os dados observacionais atuais parecem indicar que o universo deverá SE EXPANDIR ETERNAMENTE.
4. Nos estágios iniciais de formação do universo, a densidade total era dominada pela RADIAÇÃO/ENERGIA.
5. A radiação cósmica de fundo é observada hoje no comprimento de onda de MICROONDAS devido à EXPANSÃO DO UNIVERSO.
6. Comparando a densidade em massa de matéria e radiação, acha-se que no tempo presente a MATÉRIA domina.

7. Durante a época de Planck todas as forças estão UNIFICADAS, e o universo é considerado uma singularidade.
8. No processo de “produção de pares”, dois FÓTONS interagem para formar uma partícula e uma ANTI-PARTÍCULA.
9. A temperatura limite necessária para formar partículas AUMENTA (aumenta/diminui) com o aumento da massa da partícula criada.
10. O universo se expandiu por um fator 10^{50} durante a INFLAÇÃO, onde houve a separação da força FORTE das forças ELETROMAGNÉTICA e FRACA.
11. As flutuações de densidade da radiação cósmica de fundo estão ligadas a FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS.
12. Uma das vantagens da teoria da inflação é explicar os problemas de HORIZONTE e CURVATURA.

PROBLEMAS (5 pontos)

1. Através das equações de Friedmann-Lemaître obter o tamanho do universo considerando o universo estático de Einstein ($k=+1$, $R=\text{cte}$, $p=0$ e $\Lambda \neq 0$). Estime o raio do universo em Gpc se a densidade for de $8 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. (dica: obtenha o fator de escala R em função de ρ)
2. Supondo um universo estático de geometria esférica e raio do exercício anterior: a) qual o tempo t que a luz levaria para circumnavegá-lo? (considerar que a luz percorre um caminho equivalente ao perímetro de um círculo e achar t em função da densidade ρ) b) Se este universo tivesse a densidade da água (1 g/cm^3), qual seria o seu tamanho em minutos-luz?; c) Qual o tempo que a luz levaria para circumnavegá-lo em horas?; d) Como seriam observados os objetos nestas condições?
3. Para um universo de Friedmann ($\Lambda=0$), escolher um universo de $k=-1$ ou $k=+1$ e calcular a variação do fator de escala com o tempo para a geometria escolhida, supondo um universo dominado pela matéria. Como fica a expansão neste caso?
4. Faça o mesmo exercício 3 para um universo dominado pela radiação. Esboçar os gráficos $R(t) \times t$ juntos para um universo dominado pela matéria e pela radiação para a geometria escolhida.



NOME _____

N.º USP _____

CURSO _____

DISCIPLINA _____

DATA _____

NOTA	EXAMINADORES

③ $k=+1$, $R=ct$, $p=0$

EQUAÇÃO DE FRIEDMANN:

$$\frac{8\pi G}{c^2} \rho(t) = -\frac{kc^2}{R(t)^2} - \frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} - \frac{2\ddot{R}(t)}{R(t)} + \Lambda \quad (1)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho(t) = \frac{kc^2}{R(t)^2} + \frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} - \frac{\Lambda}{3} \quad (2)$$

ENTÃO: (1) $\Lambda = \frac{c^2}{R(t)^2}$

$$(2) \frac{8\pi G}{3} \rho(t) = \frac{c^2}{R(t)^2} - \frac{\Lambda}{3}$$

SUBSTITUINDO Λ : $\frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{c^2}{R^2} - \frac{c^2}{3R^2} = \frac{2}{3} \frac{c^2}{R^2}$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{2}{3} \frac{c^2}{R^2} \Rightarrow R = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho}} \quad \text{É O TAMANHO DO UNIVERSO}$$

SE $\rho = 8 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \Rightarrow R = 3 \times 10^6 \text{ km/s}$

$$\sqrt{4\pi \times 6,67 \times 10^{-11} \times 8 \times 10^{-27}}$$

$$R = 1,16 \times 10^{23} \text{ cm} \Rightarrow$$

$$R = 3,7 \text{ Gpc}$$

4) -

$$a) t = \frac{2\pi R}{c}, \text{ SENDO: } R = \frac{c}{\sqrt{4\pi G\rho}}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$$

$$b) \rho = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow R = \frac{3 \times 10^5}{\sqrt{4\pi \times 6,67 \times 10^{-11} \times 10^3}}$$

$$= 3,28 \times 10^8 \text{ km}$$

$$R \approx 18 \text{ MINUTOS-LUZ}$$

$$c) t = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{\pi}{6,67 \times 10^{-11} \times 10^3}} = 6862,97 \text{ s}$$

$$t \approx 2 \text{ HORAS}$$

d) OBSERVADORES VERIAM OS MESMOS OBJETOS A CADA 2 HORAS, NA DIREÇÃO OPOSTA

5) - VARIAÇÃO DO FATOR DE ESCALA COM O TEMPO:
DOMINADO PELA MATÉRIA:

$$ct = \int_0^R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\frac{\alpha_{\text{MATER}}}{c^2} - 4R}} dR \quad \alpha_{\text{MATER}} = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3}$$

$$a) [K=0] \quad ct = \int_0^R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\frac{\alpha_{\text{MATER}}}{c^2}}} dR \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\text{MATER}}}} \int_0^R R^{1/2} dR \Rightarrow t = \frac{2}{3\sqrt{\alpha_{\text{MATER}}}} R^{3/2}$$

$$R(t) \propto t^{2/3}$$

EXPANSÃO ETERNA



NOME _____

N.º USP _____

CURSO _____

DISCIPLINA _____

DATA _____

NOTA	EXAMINADORES

$$b) \boxed{k = -1} \Rightarrow ct = \int_0^R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\frac{\alpha_{\text{HAF}}}{c^2} + R}} dR$$

$$\text{CHAMANDO } a = \frac{\alpha_{\text{HAF}}}{c^2} \Rightarrow ct = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{R} + 1}} dR$$

$$\boxed{ct = \sqrt{R(a+R)} - a \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{R}{a}} \right)} \quad \text{EXPANSÃO ETERNA}$$

$$c) \boxed{k = +1} \Rightarrow ct = \int_0^R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\frac{\alpha_{\text{HAF}}}{c^2} - R}} dR$$

$$\Rightarrow ct = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{R} - 1}} dR$$

$$\boxed{ct = a \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{R}{a}} \right) - \sqrt{R(a-R)}}$$

A EXPANSÃO ATINGE UM MÁXIMO QUANDO $R = a$:

$$\sin^{-1} = \pi/2$$

$$\text{ENTÃO } ct_{\text{max}} = a \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{a\pi}{2c} \quad \text{É O INSTANTE}$$

ONDE A EXPANSÃO PARA!

6) - VARIAÇÃO DO FATOR DE ESCALA PARA UM UNIVERSO DOMINADO PELA RADIAÇÃO:

$$ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{\frac{\alpha_{RAD}}{c^2} - kR^2}} dR$$

$$\alpha_{RAD} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{RAD}^0 R_{RAD}^0$$

a) $k=0$ $ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{\frac{\alpha_{RAD}}{c^2}}} dR$

$$t = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\sqrt{\alpha_{RAD}}} \Rightarrow \boxed{R \propto t^{1/2}} \quad \text{EXPANSÃO ETERNA}$$

b) $k=-1$ $ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{\frac{\alpha_{RAD}}{c^2} + R^2}} dR$

$$a = \frac{\alpha_{RAD}}{c^2} \Rightarrow ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{a + R^2}} dR$$

$$\boxed{ct = \sqrt{a + R^2} - \sqrt{a}} \quad \text{EXPANSÃO ETERNA}$$

c) $k=+1$ $ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{\frac{\alpha_{RAD}}{c^2} - R^2}} dR$

$$ct = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{a - R^2}} dR$$

$$\boxed{ct = \sqrt{a} - \sqrt{a - R^2}}$$

EXPANSÃO ATINGE O MÁXIMO QUANDO $R_{MAX}^2 = a$

$$ct_{MAX} = \sqrt{a} \Rightarrow t_{MAX} = \frac{\sqrt{a}}{c}$$

PARA UM UNIVERSO DOMINADO PELA MATÉRIA : $t_{\text{MAX}}^{\text{MAT}} = \frac{\pi a}{2c}$

$\Rightarrow t_{\text{MAX}}^{\text{MAT}} > t_{\text{MAX}}^{\text{RAD}} \Rightarrow$ O TEMPO PARA A EXPANSÃO PARAR, NUM UNIVERSO DOMINADO PELA RADIAÇÃO É MENOR DO QUE EM UM UNIVERSO DOMINADO PELA MATÉRIA.

UNIVERSO DOMINADO PELA RADIAÇÃO É MENOR DO QUE UM UNIVERSO DOMINADO PELA MATÉRIA (UNIVERSO FECHADO).

$$R_{\text{MAX}}^{\text{MAT}} = a > R_{\text{MAX}}^{\text{RAD}} = \sqrt{a}$$



