

PLANETAS E SISTEMAS PLANETÁRIOS

AGA0502

Enos Picazzio

DINÂMICA DO SISTEMA SOLAR



NÃO HÁ PERMISSÃO DE USO PARCIAL OU TOTAL DESTE MATERIAL PARA OUTRAS FINALIDADES.

Parâmetros orbitais

i - Inclinação ($i > 90^\circ$, movimento retrógrado).

Ω - Longitude do nodo ascendente ($0 \leq \Omega \leq 360^\circ$)

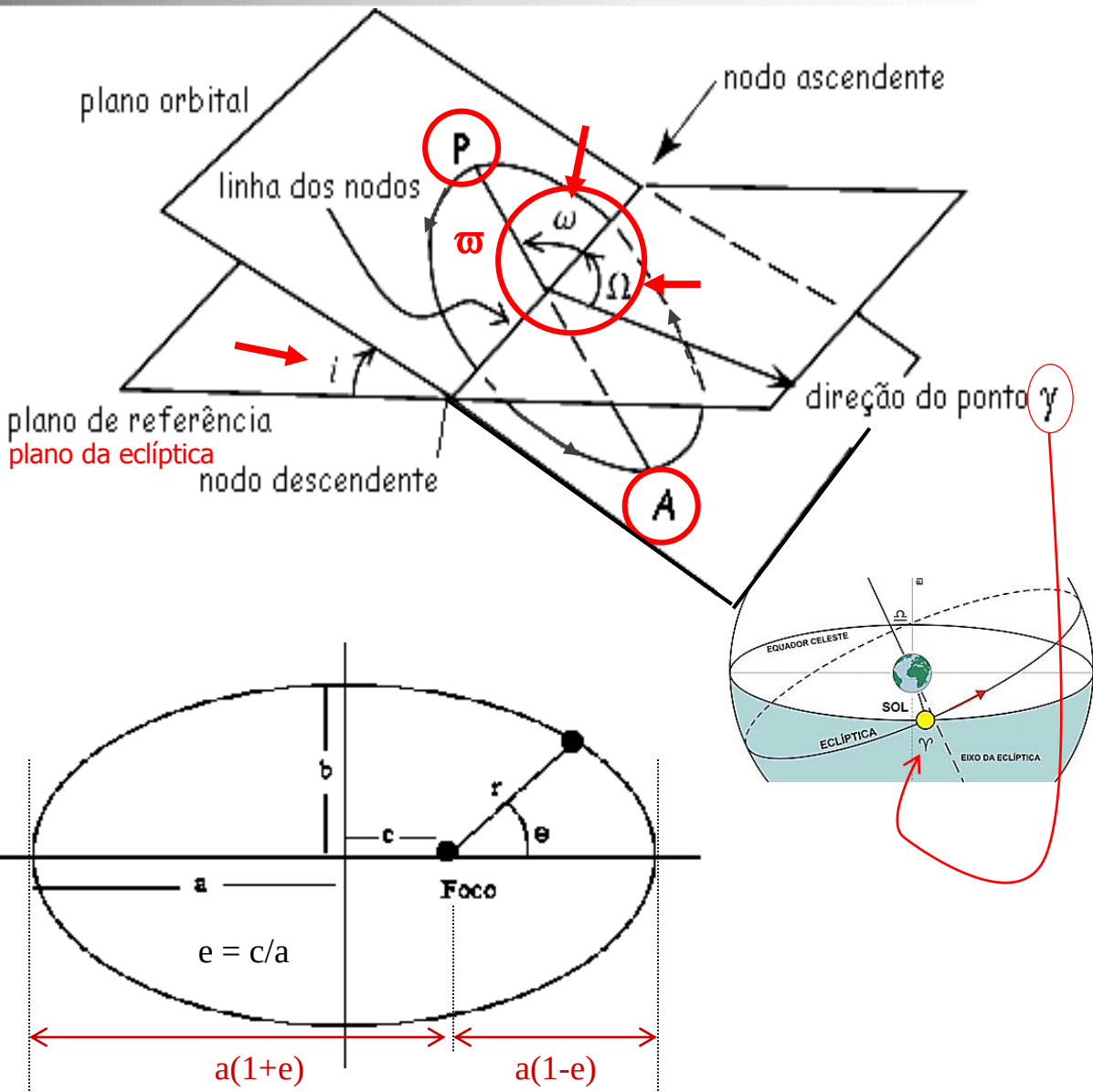
ω - Argumento do pericentro, contado no sentido do movimento do corpo ($0 \leq \omega \leq 360^\circ$)

ϖ - Longitude do pericentro ($\Omega + \omega$)

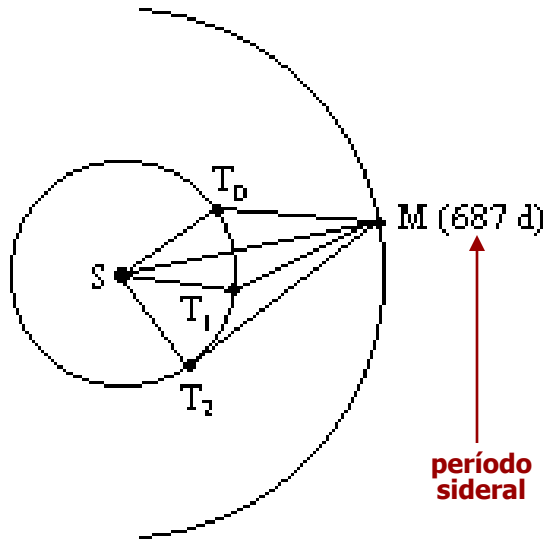
P, A - Pericentro e Apocentro

n - movimento médio (velocidade angular média do corpo em torno do atrator: $n = (2\pi/\text{período})$)

e - Excentricidade da órbita (relação entre a semi-distância focal e o semi-eixo maior (c/a))



Leis de Kepler



S: Sol; M: marte; T_0, T_1, T_2 : posição Terra

Brahe: movimento solar bem determinado
portanto, $T_0 \hat{S} T_1$; $T_0 \hat{S} T_2 \dots$ conhecidos

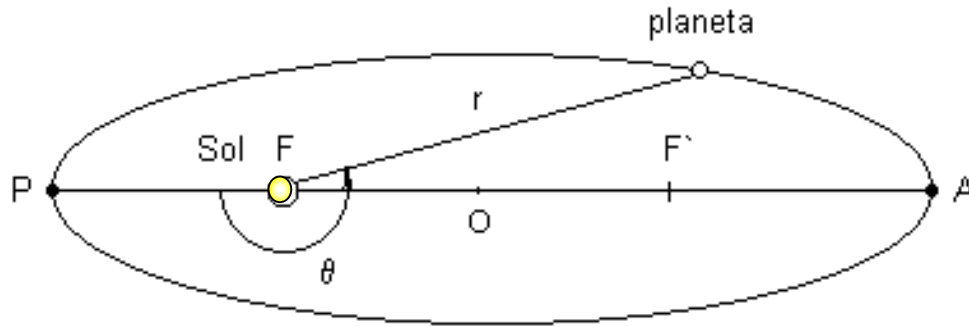
Kepler: mediu os ângulos $\hat{S} T_1 M$; $\hat{S} T_2 M \dots$
Como $\overline{SM}$ é segmento comum, Kepler
determinou $\overline{ST_1}$, $\overline{ST_2} \dots$ em função de $\overline{SM}$

Obtidas empiricamente no século XVII, através da redução das observações de Tycho Brahe.

Resultados obtidos só foram ajustados a **órbitas elípticas**.

Períodos: sideral – tempo necessário para ocupar a mesma posição orbital
 sinódico – tempo necessário para ocupar a mesma posição aparente

Leis de Kepler



PF = distância periélica

AF = distância afélica

e = excentricidade = OF/OP

r = distância heliocêntrica

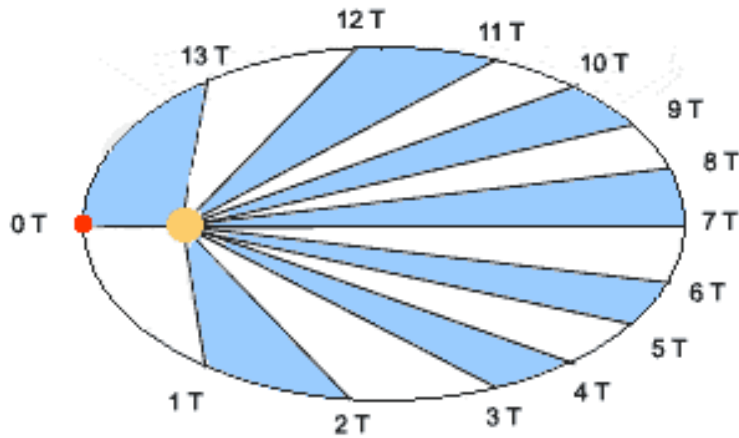
a = semi - eixo maior ($OA = OP$)

θ = ângulo de anomalia

1ª Lei: A órbita de cada planeta, relativa ao Sol, é uma elipse com o Sol em um dos focos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad 1.1.1$$

Leis de Kepler



3ª Lei: O quadrado do período orbital (P) é proporcional ao cubo do semi-eixo maior:

$$a^3 = \text{const} \times P^2 \quad \text{ou}$$
$$n^2 a^3 = \text{const} \quad \text{com} \quad n = \frac{2\pi}{P}$$

2ª Lei: O raio vetor que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} \quad (1.1.2)$$

O intervalo de tempo decorrido entre “1T e 2T”, “3T e 4T”... são iguais, logo as áreas varridas pelo raio vetor entre “1T e 2T”, “3T e 4T”... são iguais.

Lembre-se que a área do triângulo Sol-3T-4T é obtida por:

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{rd\theta \times r}{2}$$



Lei de Gravitação Universal

Energia total de um sistema gravitacional:

$$E = E_C(r) + E_P(r) = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mMG}{r} \right)$$

com :

$$E_C(r) = \text{energia cinética em } r ; E_P(r) = \text{energia potencial gravitacional em } r ; \frac{dE}{dt} = 0 \text{ (conservação da energia)}$$

Possibilidades: $0 < e < 1$ (elipse) $\Rightarrow E < 0$ (corpo gravitacionalmente preso)

$e = 1$ (parábola) $\Rightarrow E = 0$ (corpo gravitacionalmente solto)

$e > 1$ (hipérbole) $\Rightarrow E > 0$ (corpo gravitacionalmente ejetado)

para o caso de $E = 0$, as energias cinética e potencial são iguais em módulo, por isso o corpo está solto. Isto define uma velocidade crítica, a velocidade de escape :

$$0 = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mMG}{r} \right) \rightarrow \frac{v^2}{2} = \left(\frac{MG}{r} \right) \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2MG}{r}}$$



Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, pontual)

Sistema Referencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m.a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$



Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, pontual)

Sistema Referencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m.a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\text{de (1.1.2): } r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2 / r^4$$

$$\text{logo: } F(r) = m\ddot{r} - mh^2 / r^3 \qquad 1.2.1$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} \quad (1.1.2)$$



Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, pontual)

Sistema Referencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m.a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\text{de (1.1.2): } r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2 / r^4$$

$$\text{logo: } F(r) = m\ddot{r} - mh^2 / r^3 \qquad 1.2.1$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$F(r) = \frac{mh^2}{a(1 - e^2)r^2} \qquad 1.2.2$$

Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, pontual)

Sistema Referencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m.a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\text{de (1.2.1): } r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2 / r^4$$

$$\text{logo: } F(r) = m\ddot{r} - mh^2 / r^3$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

$$F(r) = \frac{mh^2}{a(1-e^2)r^2}$$

1.2.1

igualando

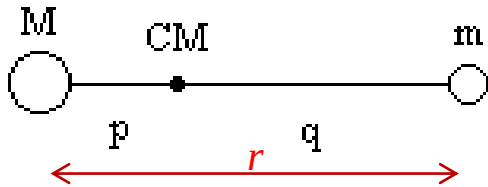
1.2.2

$$\cancel{m}\ddot{r} - \cancel{m}h^2 / r^3 = \cancel{m}h^2 / a(1-e^2)r^2 \quad 1.2.3$$

Esta é a equação diferencial do movimento.

A solução ?

Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



lembrando

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

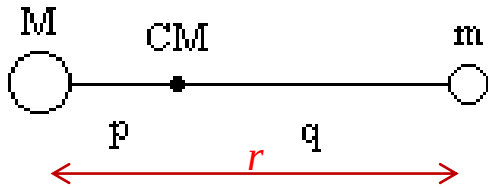
ac. em M é imposta por m. Logo:

$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2} \quad 1.3.2$$

analogamente:

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2} \quad 1.3.3$$

Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

ac. em M é imposta por m. Logo:

lembrando

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2}$$

analogamente:

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2}$$

1.3.2

somando

1.3.3

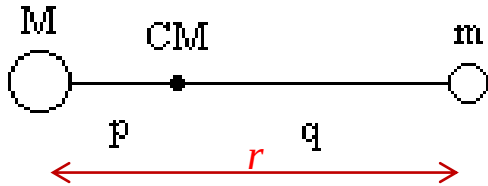
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G}{r^2}(m + M) \quad 1.3.4$$

Retomando a 1.1.2:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} \quad \leftarrow \text{momento angular}$$

$$h = r^2 \dot{\theta}; \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4}$$

Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

ac. em M é imposta por m. Logo :

$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2}$$

analogamente :

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2}$$

1.3.2

somando

1.3.3

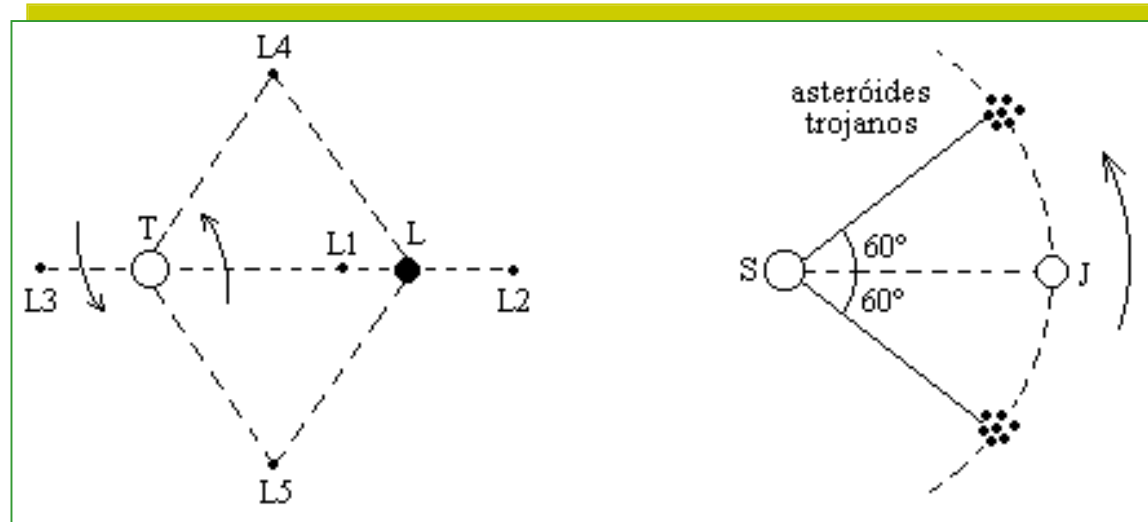
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G}{r^2}(m + M) \quad 1.3.4$$

$$\text{como } \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4} \Rightarrow \ddot{r} - h^2 / r^3 = -G(m + M) / r^2 \quad 1.3.5$$

cuja solução é :

$$r = \frac{h^2}{G(m + M)} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)} \quad 1.3.7$$

Problema de 3 corpos



Caso particular de configuração equilateral

<http://faculty.ifmo.ru/butikov/Projects/Collection6.html>

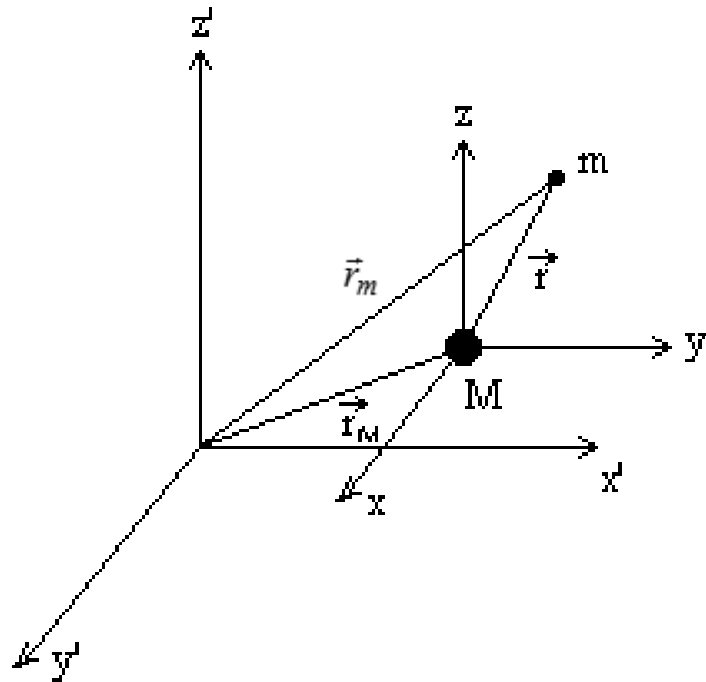
Neste caso existem 5 soluções estacionárias → 5 pontos Lagrangianos.

Soluções estáveis: L4 e L5.

Havendo perturbação, o corpo pode voltar à posição de equilíbrio dependendo da relação entre as massas envolvidas.

Exemplo típico: asteróides Troianos de Júpiter.

Problema de 3 corpos



Temos : $F = m\vec{a} = m\vec{r}$

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

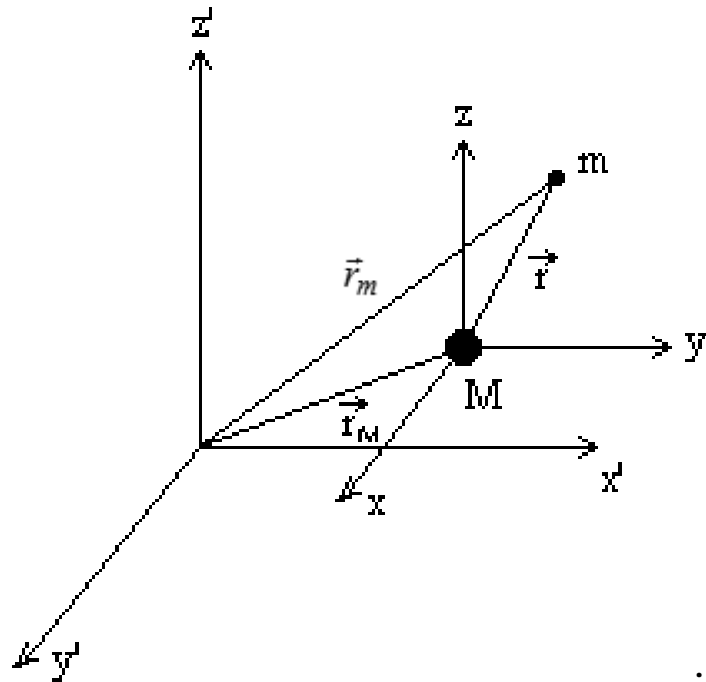
$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

A - equação do movimento relativo

$$m \ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}$$

$$M \ddot{\vec{r}}_M = \frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_M = \frac{Gm\vec{r}}{r^3}$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

A - equação do movimento relativo

como

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m - \ddot{\vec{r}}_M = -\frac{GM\vec{r}}{r^3} - \frac{Gm\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3} G(M + m) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \mu$$

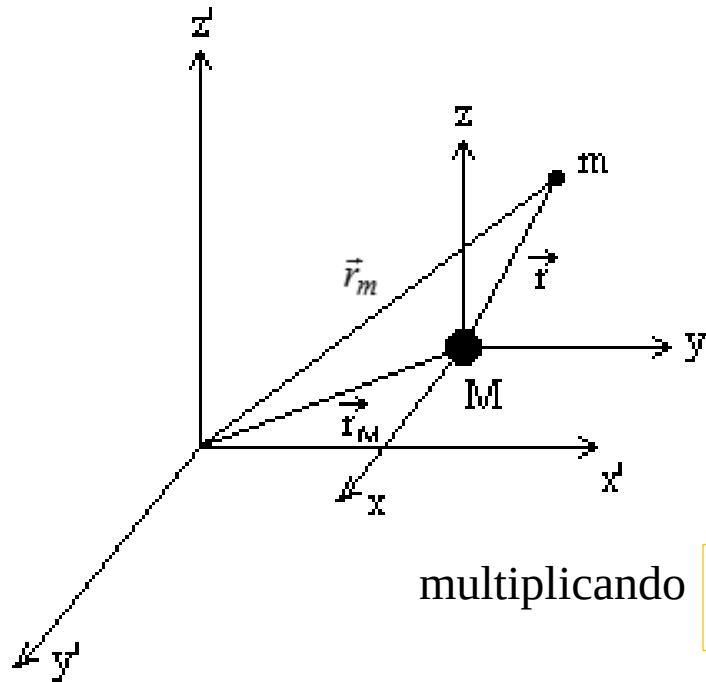
$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (\text{I})$$

com $\mu = G(M + m) \quad [\text{ML}^3\text{T}^{-2}]$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

B – conservação da energia

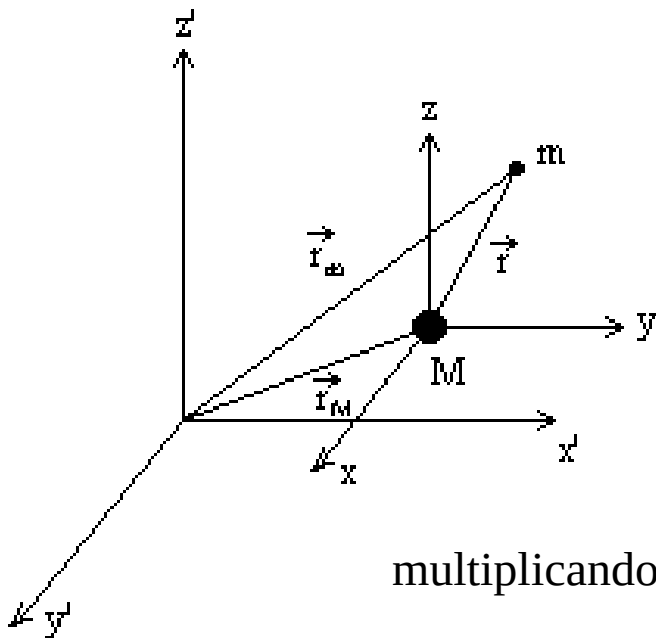
multiplicando $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$ (I) escalarmente por $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \frac{\mu}{r^3} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} r \cdot \dot{r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = cte \quad (\text{II})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \mu r^{-1} \right) = \frac{2v \dot{v}}{2} - \mu (-1) r^{-2} \frac{dr}{dt} = v \dot{v} + \frac{\mu \dot{r}}{r^2} = v \dot{v} + \frac{\mu r \dot{r}}{r^3}$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

C – conservação do momento angular

multiplicando $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$ (I) vetorialmente por $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0 \quad \therefore \quad \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad (\text{pois } \vec{r} \times \vec{r} = 0)$$

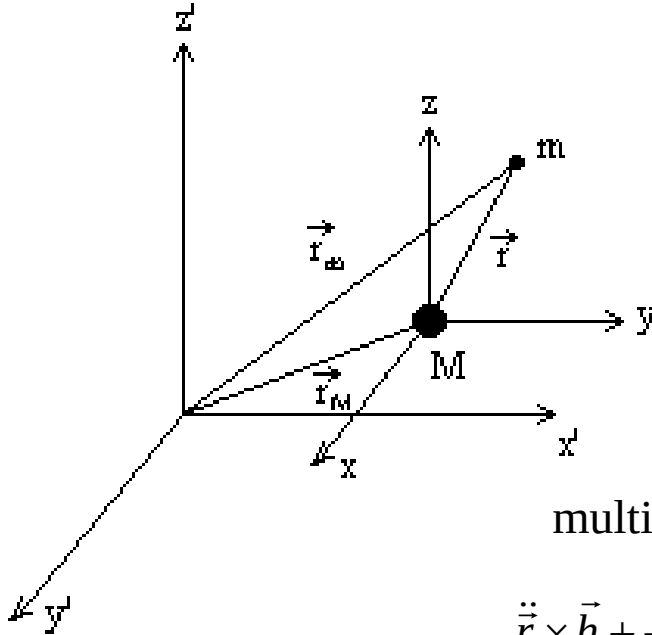
lembrando:
 $\vec{r} \times \vec{r} \times \sin(\theta = 0) = 0$

$$\text{como } \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = cte \quad (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0)$$

Momento angular: $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = cte$ (III)

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = cte$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

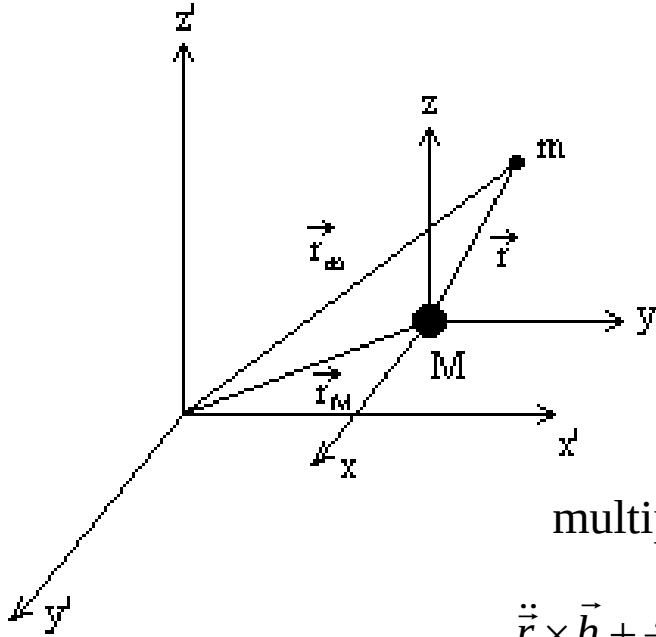
$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

multiplicando $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$ (I) vetorialmente por $\vec{h}$:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r})$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

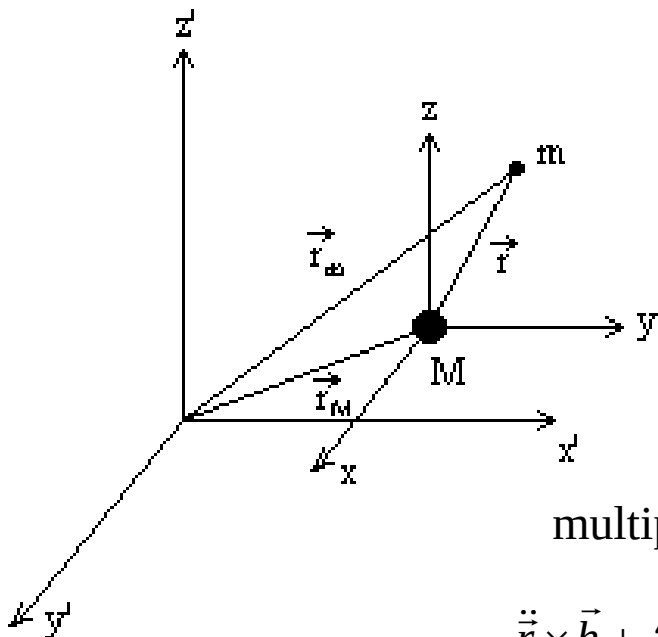
multiplicando $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$ (I) vetorialmente por $\vec{h}$:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} ([\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{r})$$

lembrando que
 $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ (III)

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

multiplicando $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} ([\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{r})$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} ([\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{r})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{v} - \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \vec{v} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r}$$

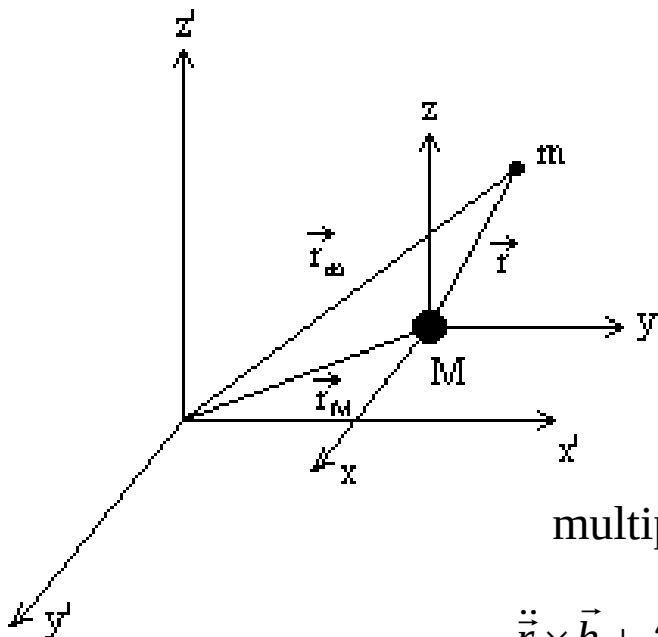
$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} - r \frac{dr}{dt} \vec{r}$$

$$\times \left(-\mu \frac{1}{r^3} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = -\mu \left(\frac{r^2}{r^3} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{r}{r^3} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = -\mu \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

multiplicando $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} ([\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} ([\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{r})$$

então: $\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{v} - \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \vec{v} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r}$$

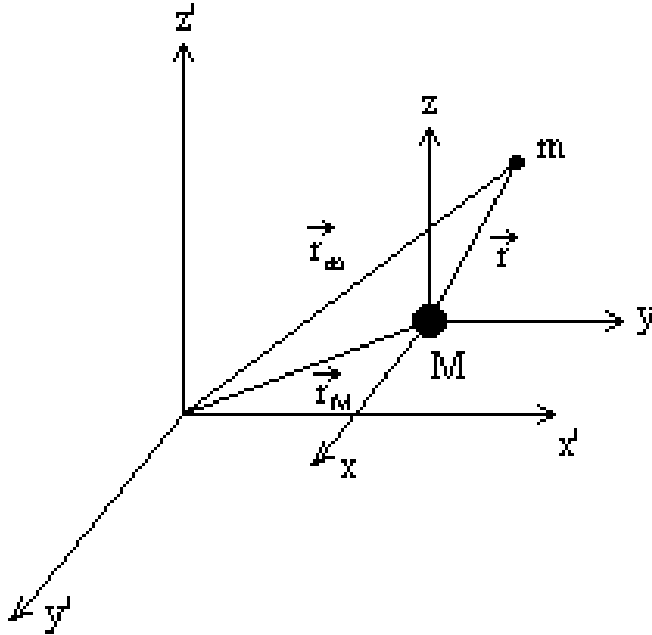
$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} - r \frac{dr}{dt} \vec{r}$$

$$\times \left(-\mu \frac{1}{r^3} \right)$$

$$\frac{-\mu (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{r^3} = -\mu \left(\frac{r^2}{r^3} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{r}{r^3} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

$$\frac{-\mu (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{r^3} = -\mu \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

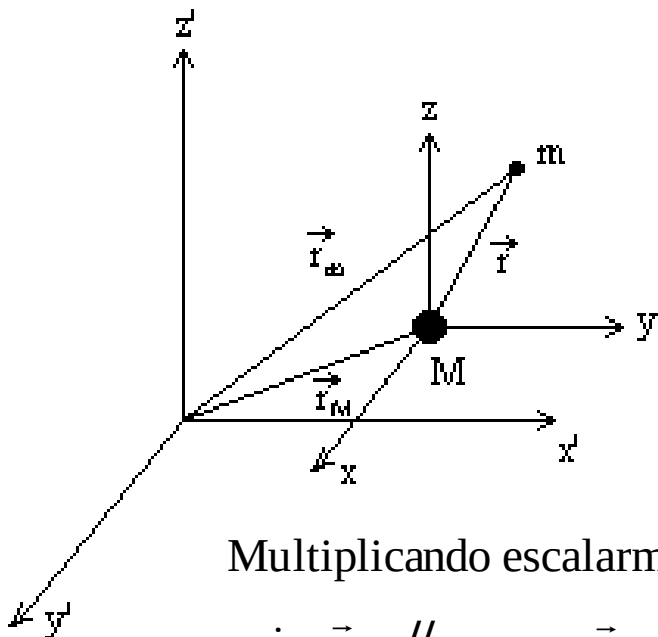
D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando:
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com $\vec{\beta} \equiv$ cte de integração

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando:
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com $\vec{\beta} \equiv$ cte de integração

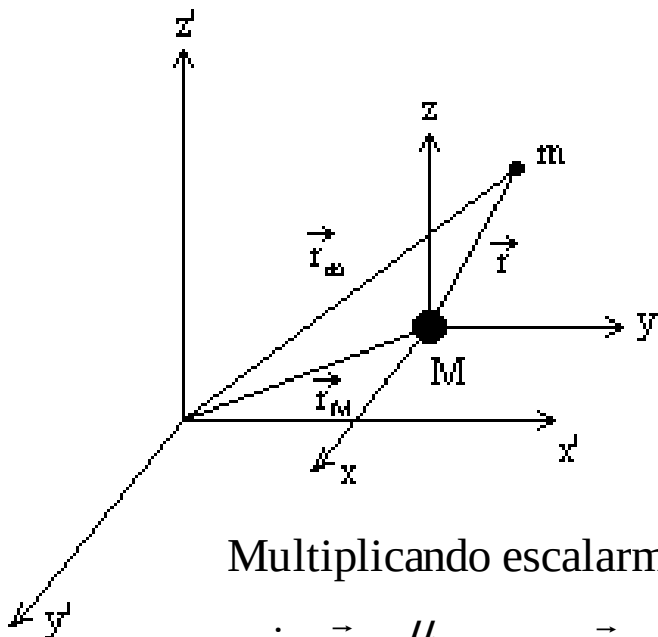
Multiplicando escalarmente por $\vec{r}$:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

como $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}$:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando:
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com $\vec{\beta} \equiv$ cte de integração

Multiplicando escalarmente por $\vec{r}$:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

como $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}$:

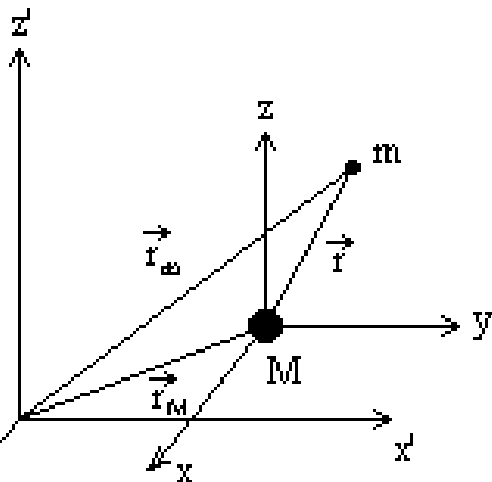
$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{III})$$

$$\Rightarrow h^2 = \mu r + r \beta \cos \gamma$$

com $\gamma \equiv$ ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{\beta}$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando:
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com $\vec{\beta} \equiv$ cte de integração

Multiplicando escalarmente por $\vec{r}$:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

como $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}$:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (\text{III})$$

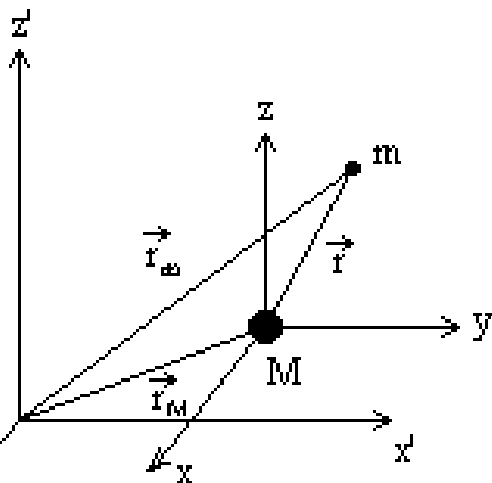
$$\Rightarrow h^2 = \mu r + r \beta \cos \gamma$$

com $\gamma \equiv$ ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{\beta}$

$$h^2 = \mu r + r \beta \cos \gamma = r(\mu + \beta \cos \gamma)$$

$$r = \frac{h^2}{\mu + \beta \cos \gamma} = \frac{h^2 / \mu}{1 + \frac{\beta}{\mu} \cos \gamma}$$

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando:
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com $\vec{\beta} \equiv$ cte de integração

Multiplicando escalarmente por $\vec{r}$:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

como $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}$:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (\text{III})$$

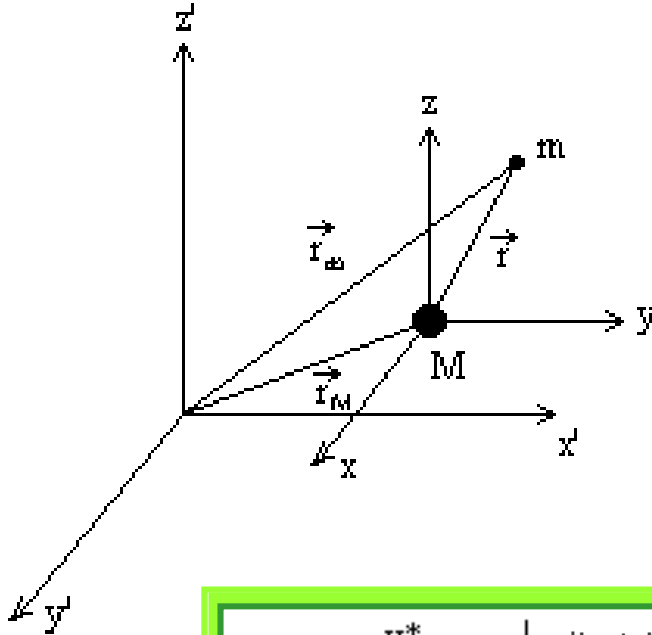
$$\Rightarrow h^2 = \mu r + r \beta \cos \gamma$$

com $\gamma \equiv$ ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{\beta}$

$$\text{Logo: } r = \frac{h^2 / \mu}{1 + (\beta / \mu) \cos \gamma} \quad (\text{VI})$$

1º Lei de Kepler (Eq. geral das cônicas)

Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

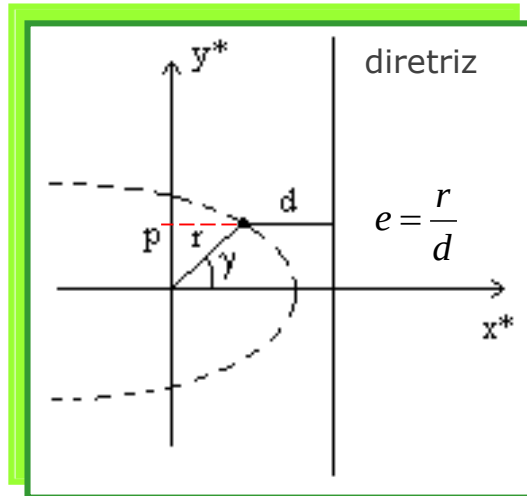
$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando:
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com $\vec{\beta} \equiv$ cte de integração

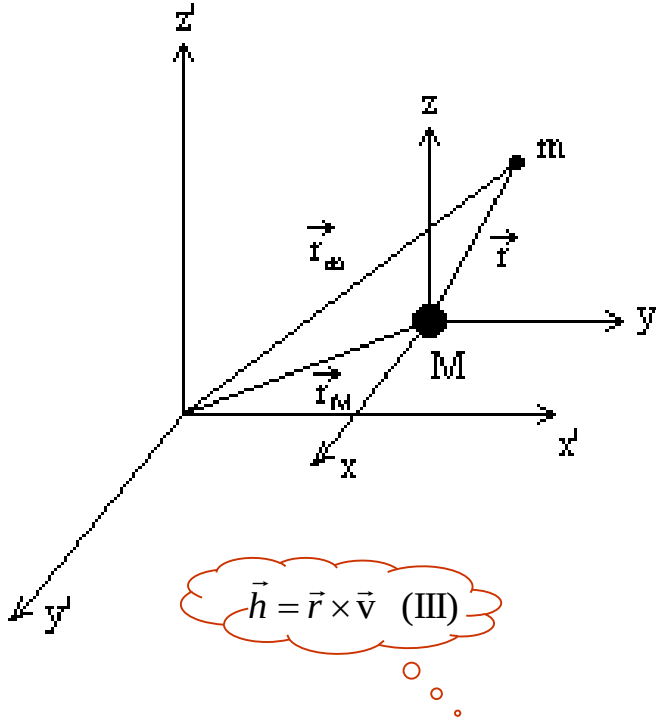


Em coord. polares:
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \gamma}$$

com $p = h^2 / \mu$ e $e = \beta / \mu$



Problema de 3 corpos



$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{III})$$



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

E – 2ª lei de Kepler)

Retomando a eq. III :

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Em coord. polares :

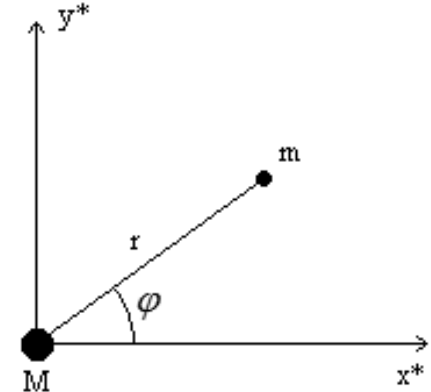
$$\vec{r} = x^* \vec{i} + y^* \vec{j}$$

$$x^* = r \cos \varphi$$

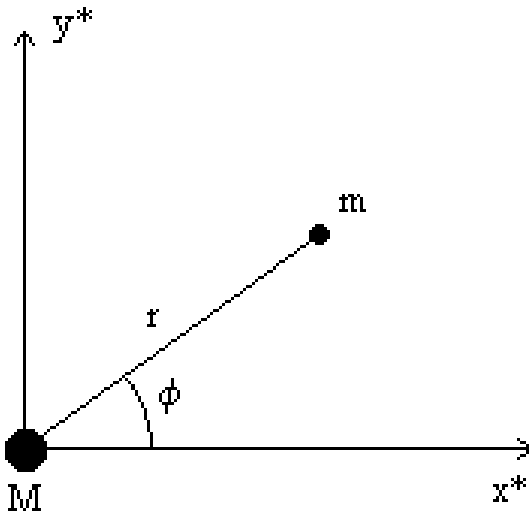
$$y^* = r \sin \varphi$$

$$\dot{x}^* = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{y}^* = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$$



Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$ massas

$x', y', z' \equiv$ sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$ sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

E – 2ª lei de Kepler)

Retomando a eq. III :

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Em coord. polares :

$$\vec{r} = x^* \vec{i} + y^* \vec{j}$$

$$x^* = r \cos \phi \quad \dot{x}^* = \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi}$$

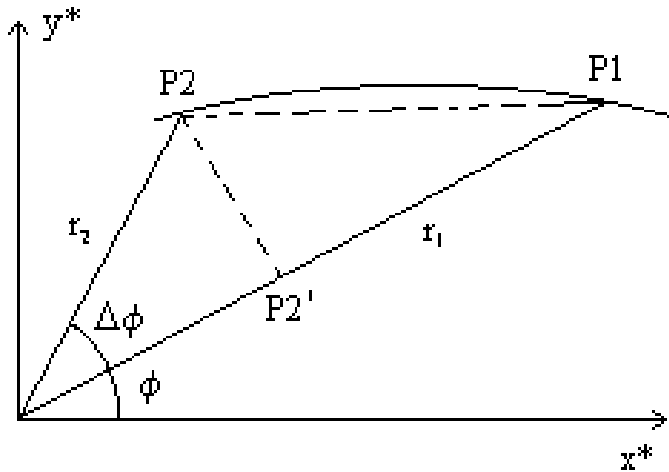
$$y^* = r \sin \phi \quad \dot{y}^* = \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi}$$

Logo :

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^* & y^* & 0 \\ \dot{x}^* & \dot{y}^* & 0 \end{vmatrix} = x^* \dot{y}^* \vec{k} - \dot{x}^* y^* \vec{k} = r \cos \phi (\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi}) - r \sin \phi (\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi}) = \\ &= r \dot{r} \sin \phi \cos \phi + r^2 \cos^2 \phi \dot{\phi} - r \dot{r} \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin^2 \phi \dot{\phi} = \\ &= r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \dot{\phi} = r^2 \dot{\phi} \end{aligned} \quad \therefore h = r^2 \dot{\phi}$$

Problema de 3 corpos

E – 2ª lei de Kepler



Sendo P1 e P2 posições próximas e sucessivas no intervalo Δt , a área será:

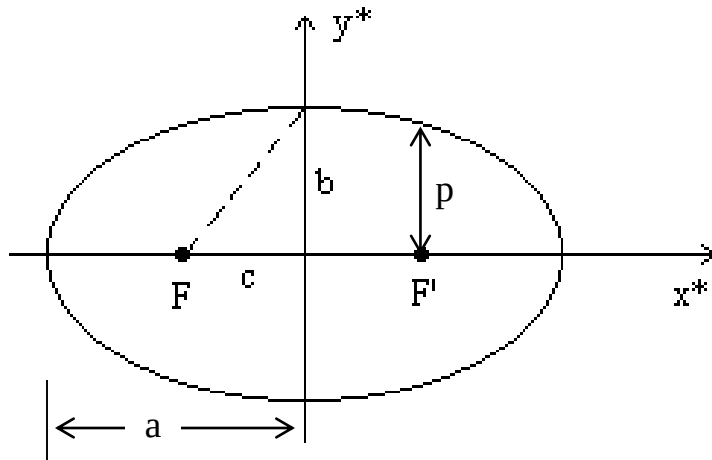
$$\Delta A = \frac{r_1 r_2 \sin \Delta \phi}{2} = \frac{r_1 r_2}{2} \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

fazendo $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{h}{2} \quad (\text{VII})$$

Problema de 3 corpos

E – 3ª lei de Kepler



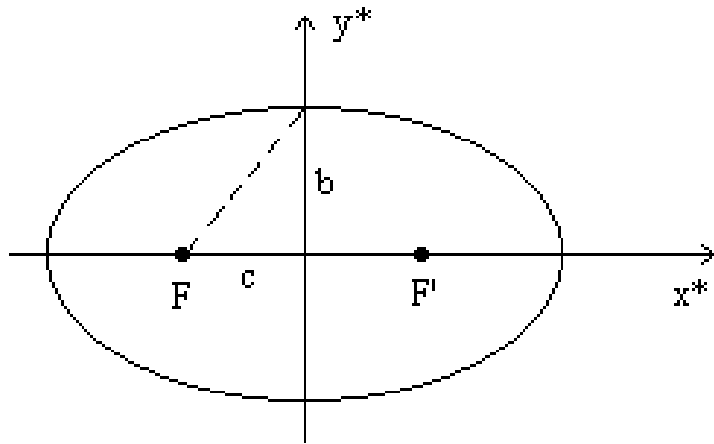
Das relações triviais da elipse :

$$e = \frac{c}{a} \quad p = a(1 - e^2) \quad A = \pi ab \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\therefore b = \sqrt{a \cdot p} = h \sqrt{\frac{a}{\mu}} \quad \text{pois } p = \frac{h^2}{\mu}$$

Problema de 3 corpos

E – 3ª lei de Kepler



Das relações triviais da elipse :

$$e = \frac{c}{a} \quad p = a(1 - e^2) \quad A = \pi ab \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\therefore b = \sqrt{a \cdot p} = h \sqrt{\frac{a}{\mu}} \quad \text{pois } p = \frac{h^2}{\mu}$$

Da eq. VII :

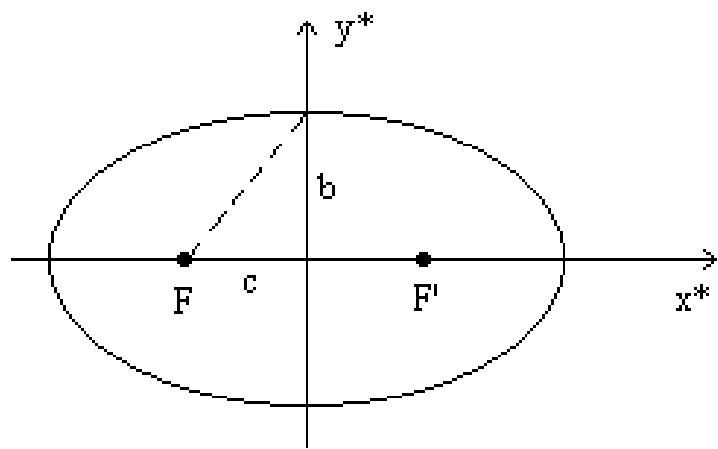
$$dA = \frac{h}{2} dt$$

$$\text{integrando : } \pi ab = \frac{h}{2} T \Rightarrow \frac{4\pi^2 (ab)^2}{h^2} = T^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{h}{2}$$



Problema de 3 corpos



E – 3ª lei de Kepler

Das relações triviais da elipse :

$$e = \frac{c}{a} \quad p = a(1 - e^2) \quad A = \pi ab \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\therefore b = \sqrt{a \cdot p} = h \sqrt{\frac{a}{\mu}} \quad \text{pois } p = \frac{h^2}{\mu}$$

Da eq. VII :

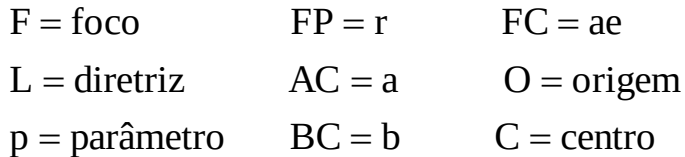
$$dA = \frac{h}{2} dt$$

$$\text{integrando : } \pi ab = \frac{h}{2} T \Rightarrow \frac{4\pi^2 (ab)^2}{h^2} = T^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (\text{VIII})$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{h}{2}$$





F – 1ª lei de Kepler

Definição :

secção cônica é o lugar geométrico dos pontos P, tal que:

$$\frac{|PF|}{|PD|} = e \quad (\text{excentricidade}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |PD| &= |P_1D_1| \\ &= D_1F + FP_1 = p + r \cos \theta \quad (2) \end{aligned}$$

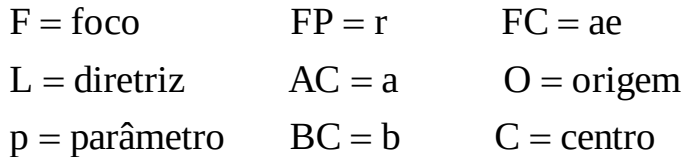
$$|PF|=r \quad (3)$$

substituindo (3) e (2) em (1):

$$\frac{r}{p+r \cos \theta}=e \quad \Rightarrow \quad r=\frac{ep}{1-e \cos \theta} \quad (4)$$

$$\text{Quando } \theta = 180^\circ: \quad r = |AF| = |AC| - |FC| = a - ae = a(1 - e) \quad (5)$$

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos 180} = \frac{ep}{1 + e} \quad (6)$$



F – 1ª lei de Kepler

$$(6) \quad r = \frac{ep}{1+e}$$

$$(8) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \theta}$$

A hand-drawn lowercase letter 'b' in red ink. A red arrow at the bottom of the vertical stroke points downwards, indicating the direction of the first stroke.

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/Chaos/ThreeBody/ThreeBody.html>

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (9)$$