AGG0232-Sísmica I
2023

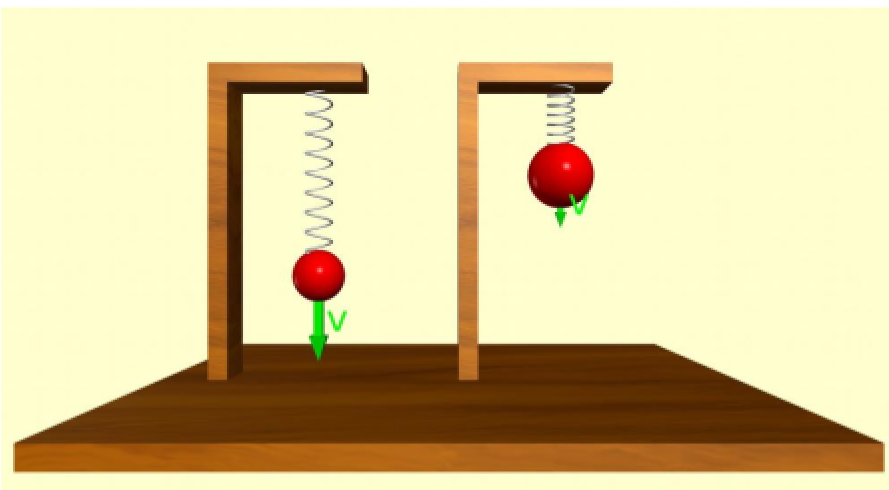
Aula 2 – Velocidade das Ondas Sísmicas
X
propriedades físicas do meio

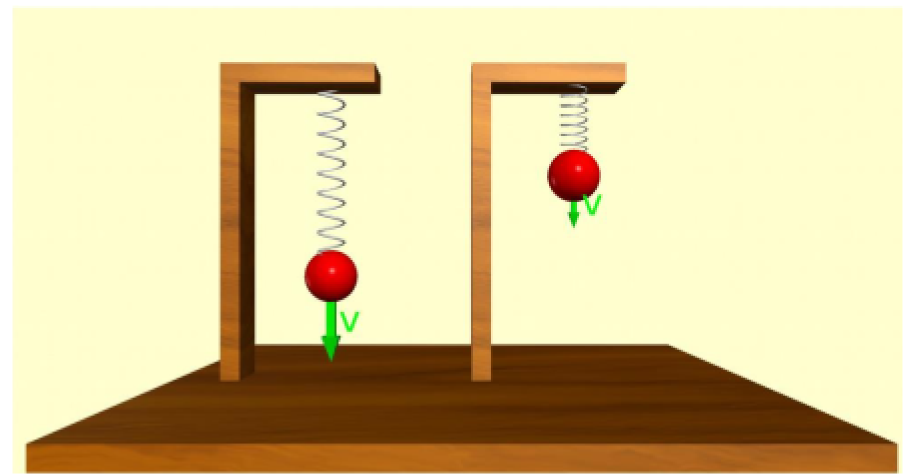
Profa. Liliana Diogo

Sistema massa-mola - oscilador harmônico

A velocidade depende da força de recuperação (análogo a resistência da mola) e da densidade (análogo a massa da esfera):

- quando a força aumenta, a velocidade também aumenta
- quando a massa aumenta (torna mais lenta a mola), há redução da velocidade





Rigidez igual, densidade diferente

Rigidez diferente, densidade igual

Lei de Hooke: $\mathbf{f} = -K\mathbf{x}$ $\mathbf{f}$ = força elástica restauradora

Velocidade das Ondas Sísmicas dependem:

- das propriedades elásticas do meio (resistência do meio, análogo à rigidez na mola; as deformações das partículas dependem dessas propriedades);
- e das densidades dos materiais (inércia do meio)

V_P e V_S são funções cujas variáveis são os parâmetros elásticos e a densidade do meio em que se propagam.

V = f (parâmetros elásticos, densidade)

Elasticidade de um meio contínuo

Lei de Hooke: relacionamento linear é válido para pequenas deformações

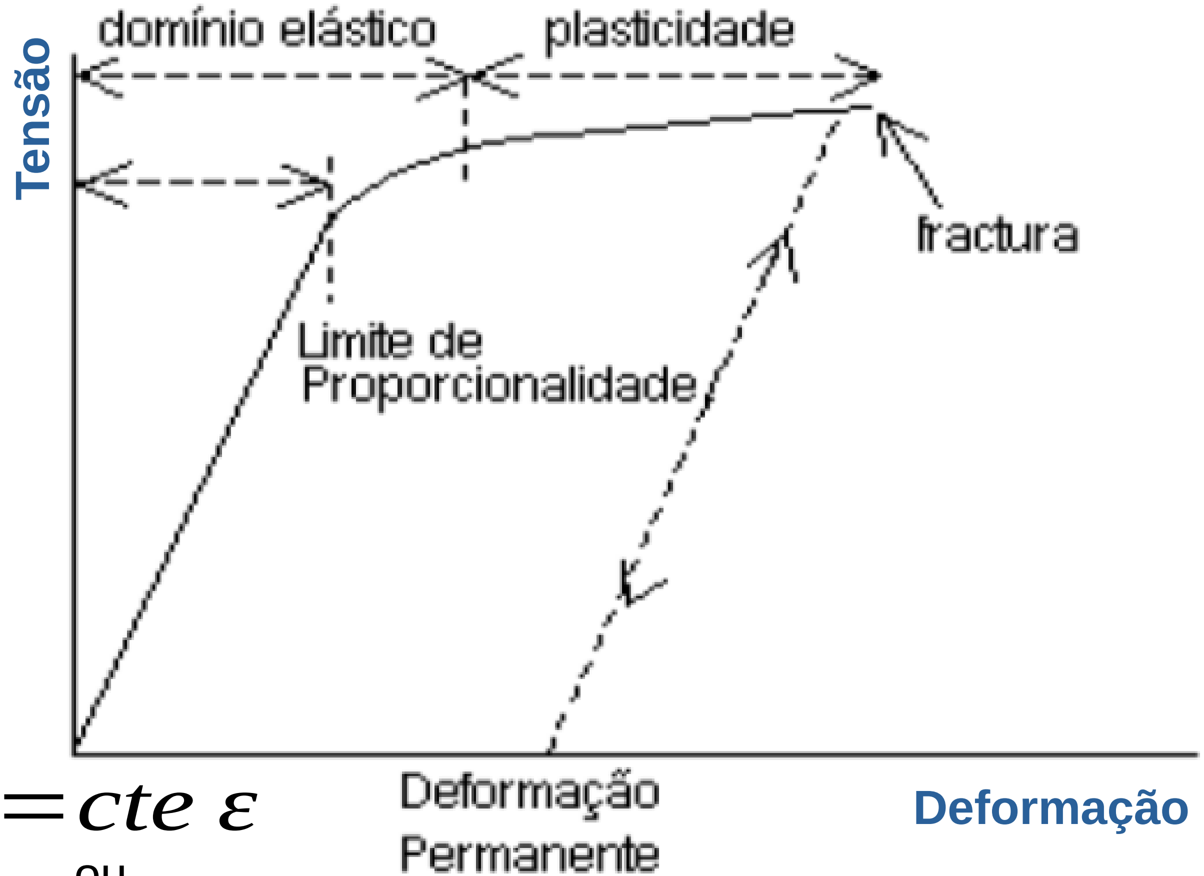
Esforço = C Deformação

Tensão
Esforço
(*Stress*) = $\frac{\text{força}}{\text{área}}$

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{F}{A}$$

Deformação
(*Strain*) = $\frac{\text{“variação”}}{\text{“original”}}$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



$$\sigma = cte\ \varepsilon$$

ou

$$\tau = cte\ \varepsilon$$

Parâmetros Elásticos

Módulos (ou Coeficientes): são definições para caracterizar o comportamento elástico dos materiais (ou meios):

E (ou Y)– Young

σ ou ν – Poisson (Razão de Poisson (*Poisson Ratio*))

K – Bulk; Compressibilidade (ou Incompressibilidade)

μ (ou G) – Rigidez (ou de Cisalhamento)

Os próximos 4 slides referem-se a descrição do significado físico das definições desses parâmetros

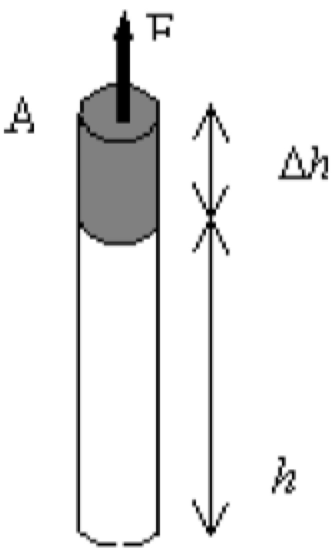
Módulo de Young (E)

Esforço e deformação longitudinais à direção da Força

$$\tau = cte\ \varepsilon$$

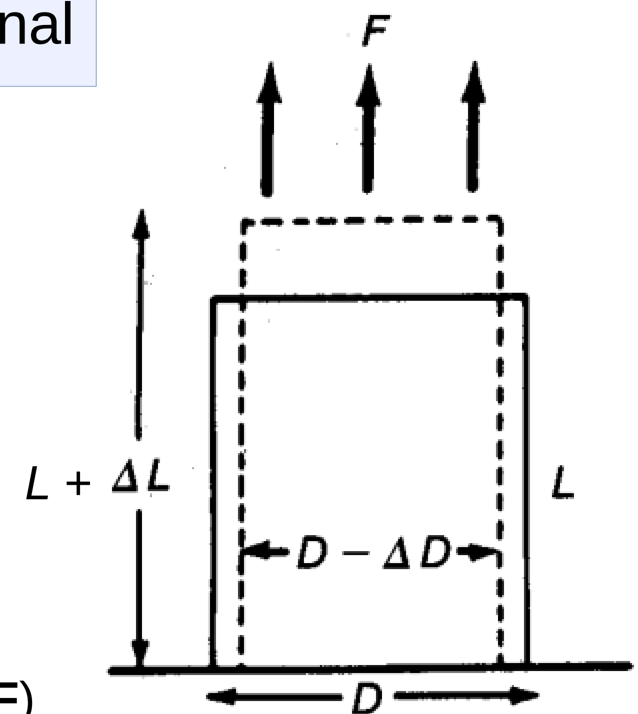
$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta h}{h}$$

$$E = \frac{\text{esforço longitudinal}}{\text{deformação longitudinal}}$$



$$E = \frac{\dfrac{F}{A}}{\dfrac{\Delta L}{L}}$$

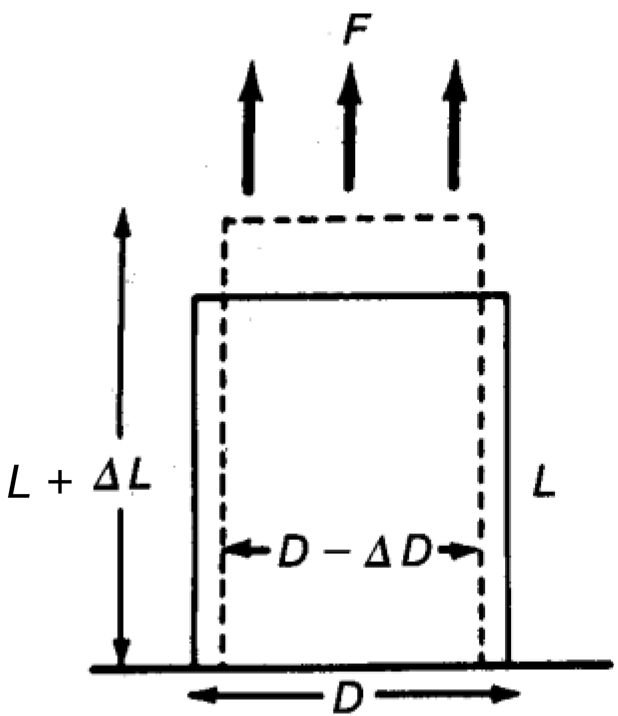
“A” é a área de uma seção transversal à direção da força (**F**)



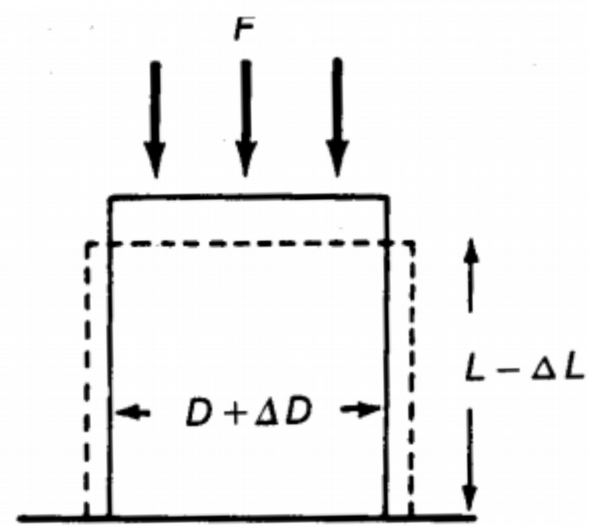
Coeficiente de Poisson ou Razão de Poisson(*Poisson Ratio*)

Usualmente é utilizada a letra (σ) ou a letra (ν)

$$\sigma = \frac{\text{deformação tranversal}}{\text{deformação longitudinal}}$$



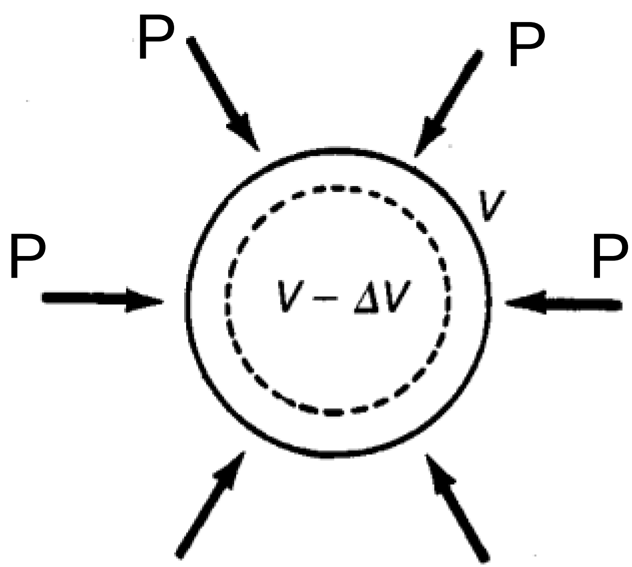
$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta D}{D}}{\dfrac{\Delta L}{L}}$$



$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta D}{D}}{\dfrac{-\Delta L}{L}}$$

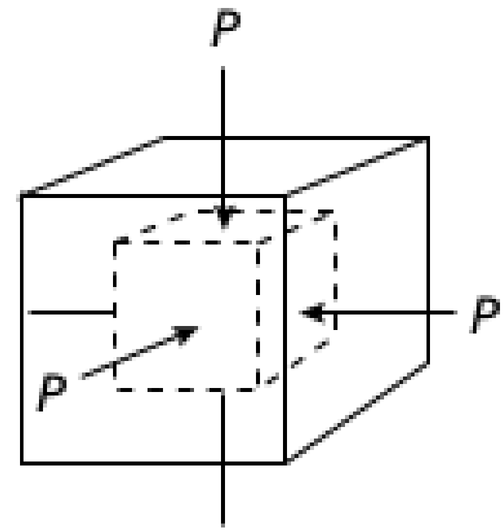
Módulo de (In)Compressibilidade (K) (*Bulk Modulus*)

$$K = \frac{\text{esforço volumétrico (Pressão)}}{\text{deformação volumétrica}}$$



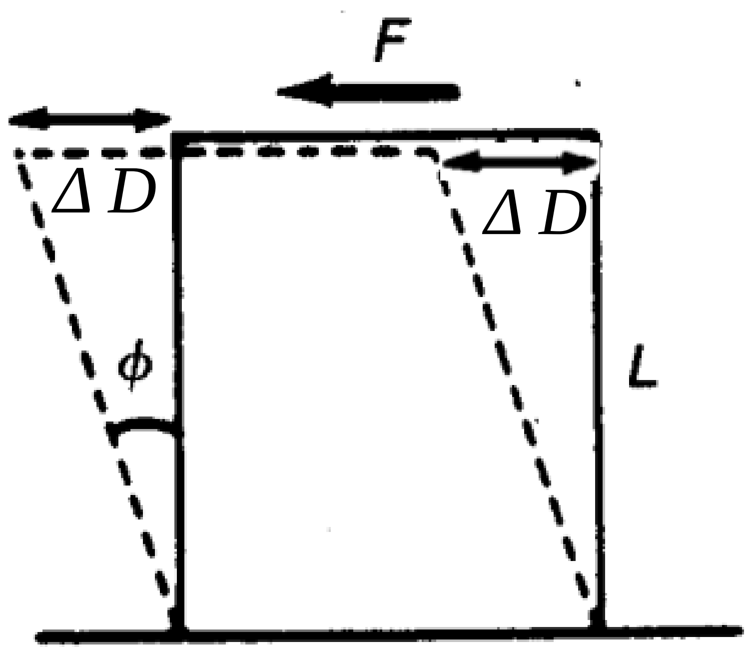
$$K = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$$K = -\frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$$



Módulo de Rigidez (ou de Cisalhamento)

$$\mu = \frac{\text{esforço transversal (de cisalhamento)}}{\text{deformação transversal (de cisalhamento)}}$$



A deformação de cisalhamento é quantificada pelo ângulo (Φ).

Para pequenas deformações:

$$\phi = \tan(\phi) = \frac{\Delta D}{L}$$

$$\mu = \frac{\text{esforço transversal (de cisalhamento)}}{\text{deformação transversal (de cisalhamento)}}$$

$$E = \frac{\text{esforço longitudinal}}{\text{deformação longitudinal}}$$

$$E = 2\mu(1+\sigma) = 3K(1-2\sigma)$$

$$K = \frac{\text{esforço volumétrico (Pressão)}}{\text{deformação volumétrica}}$$

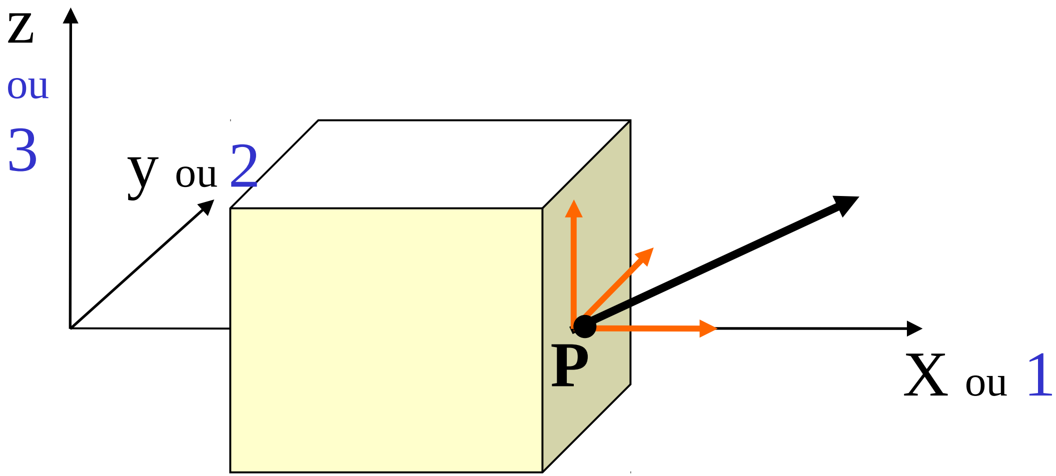
$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

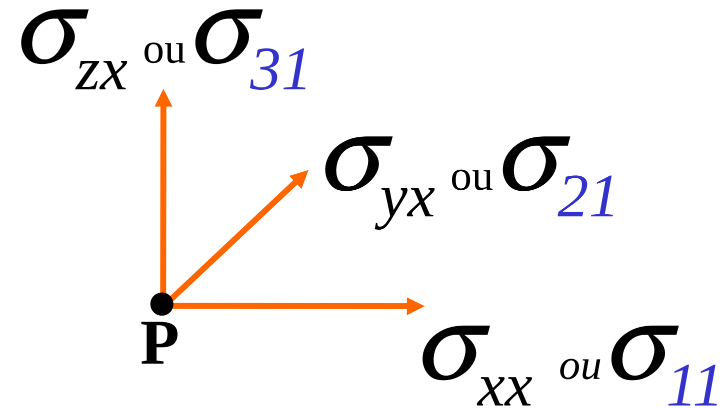
$$\sigma = \frac{\text{deformação tranversal}}{\text{deformação longitudinal}}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Os próximos slides ainda são rascunhos

O esforço σ_{ij} é um tensor de 2ª ordem, pois depende da orientação do elemento de área





Diferentes notações para os índices $i,j=x, y, z$ ou $j=1,2,3$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x},t) = c_{ijkl}(\mathbf{x})\, e_{kl}(\mathbf{x},t) \qquad [\tau] = [c][e]$$

$$i,j,k,l = x,y,z \quad \text{or} \quad i,j,k,l = 1,2,3.$$

Para meios isotrópicos

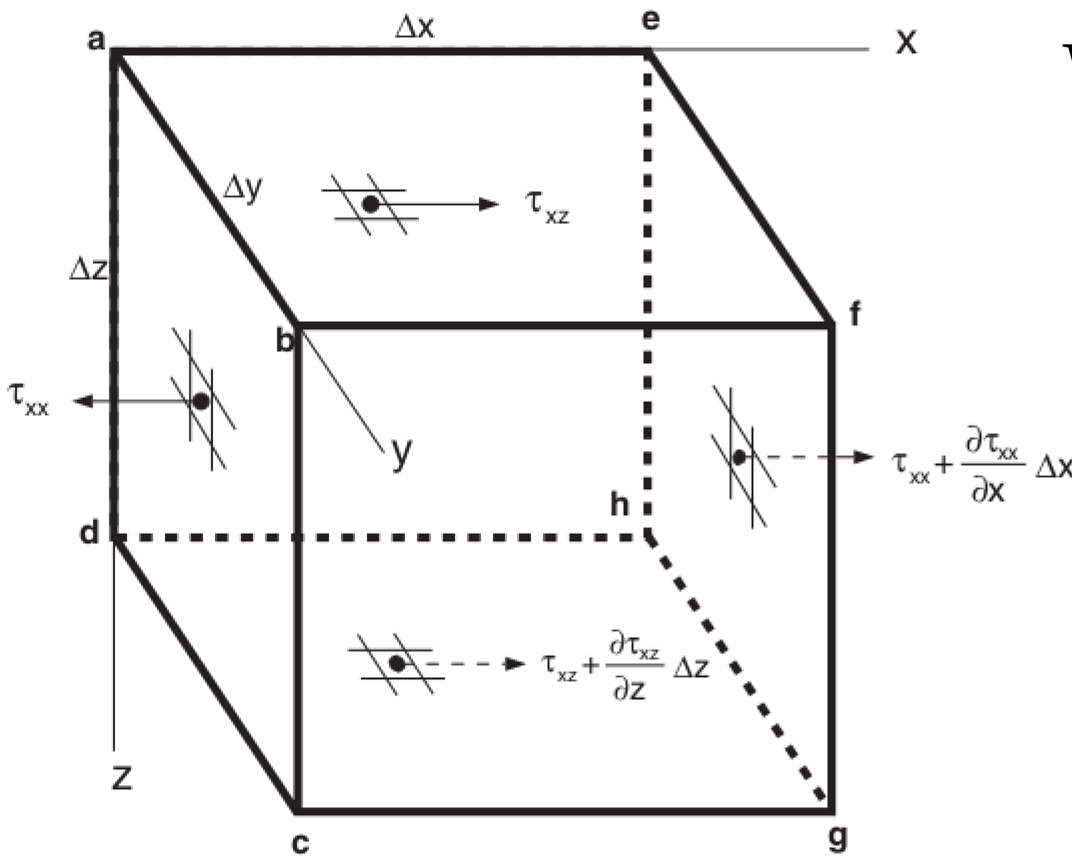
$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda\Theta + 2\mu e_{xx} \\ \tau_{yy} &= \lambda\Theta + 2\mu e_{yy} \\ \tau_{zz} &= \lambda\Theta + 2\mu e_{zz} \\ \tau_{yz} &= \mu e_{yz} \\ \tau_{zx} &= \mu e_{zx} \\ \tau_{xy} &= \mu e_{xy}, \end{aligned}$$

$$E = 2\mu(1+\sigma) = 3K(1-2\sigma)$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$



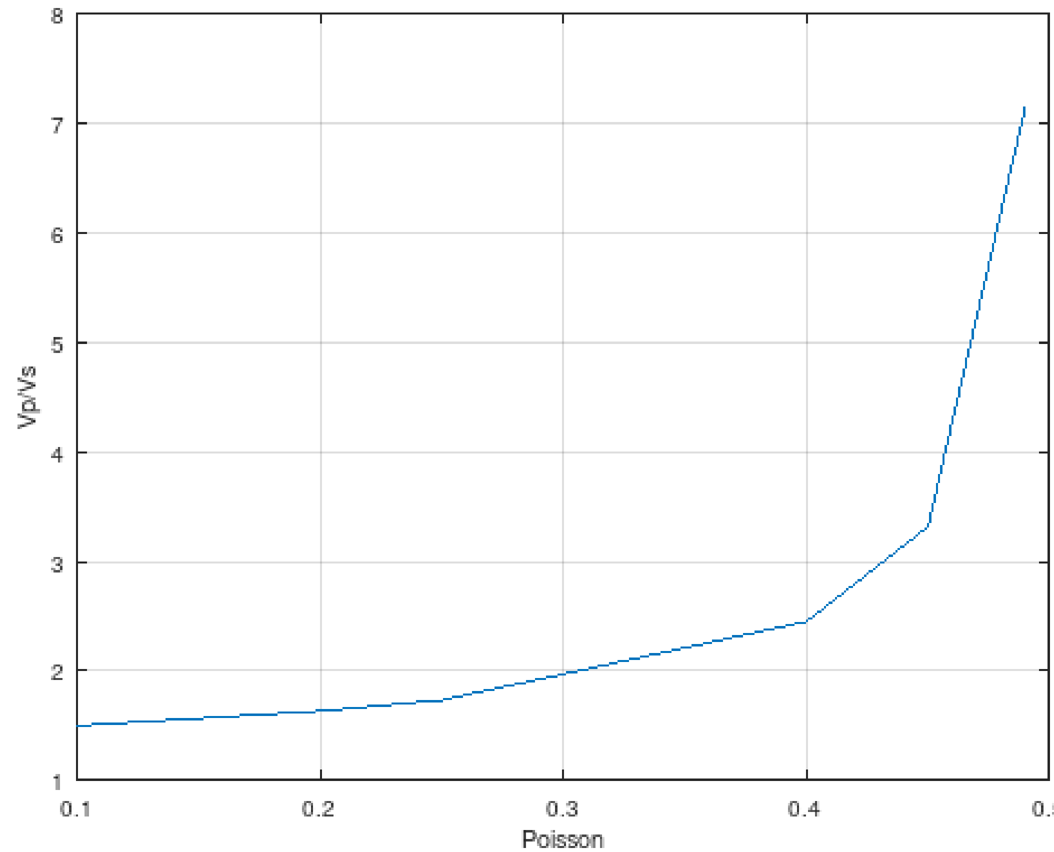
$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \qquad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

São expressões teóricas, deduzidas a partir da teoria físico-matemática de propagação de ondas

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$\frac{V_P}{V_S} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}}$$



Wikipedia

V · D · E **Módulos elásticos para materiais homogêneos isotrópicos** [Esconder]

Módulo volumétrico (K) · Módulo de Young (E) · Primeiro parâmetro de Lamé (λ) · Módulo de cisalhamento (G) · **Coeficiente de Poisson** (ν) · Módulo de onda P (M)

Fórmulas de conversão

Materiais lineares homogêneos e isotrópicos tem suas propriedades elásticas determinadas unicamente por qualquer dois módulos dentre estes, e assim dados quaisquer dois, qualquer outro dos módulos elásticos pode ser determinado de acordo com estas fórmulas.

	$(K,\,E)$	$(K,\,\lambda)$	$(K,\,G)$	$(K,\,\nu)$	$(E,\,G)$	$(E,\,\nu)$	$(\lambda,\,G)$	$(\lambda,\,\nu)$	$(G,\,\nu)$	$(G,\,M)$
$K=$	K	K	K	K	$\tfrac{EG}{3(3G-E)}$	$\tfrac{E}{3(1-2\nu)}$	$\lambda+\tfrac{2G}{3}$	$\tfrac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\tfrac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$M-\tfrac{4G}{3}$
$E=$	E	$\tfrac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\tfrac{9KG}{3K+G}$	$3K(1-2\nu)$	E	E	$\tfrac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\tfrac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2G(1+\nu)$	$\tfrac{G(3M-4G)}{M-G}$
$\lambda=$	$\tfrac{3K(3K-E)}{9K-E}$	λ	$K-\tfrac{2G}{3}$	$\tfrac{3K\nu}{1+\nu}$	$\tfrac{G(E-2G)}{3G-E}$	$\tfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	λ	λ	$\tfrac{2G\nu}{1-2\nu}$	$M-2G$
$G=$	$\tfrac{3KE}{9K-E}$	$\tfrac{3(K-\lambda)}{2}$	G	$\tfrac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	G	$\tfrac{E}{2(1+\nu)}$	G	$\tfrac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	G	G
$\nu=$	$\tfrac{3K-E}{6K}$	$\tfrac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\tfrac{3K-2G}{2(3K+G)}$	ν	$\tfrac{E}{2G}-1$	ν	$\tfrac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	ν	ν	$\tfrac{M-2G}{2M-2G}$
$M=$	$\tfrac{3K(3K+E)}{9K-E}$	$3K-2\lambda$	$K+\tfrac{4G}{3}$	$\tfrac{3K(1-\nu)}{1+\nu}$	$\tfrac{G(4G-E)}{3G-E}$	$\tfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\lambda+2G$	$\tfrac{\lambda(1-\nu)}{\nu}$	$\tfrac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$	M

A matriz constitutiva (9 por 9, ou 6 por 6 na notação de Voigt) da lei de Hooke (em três dimensões) pode ser parametrizada com somente duas componentes independentes para materiais homogêneos isotrópicos. Qualquer par pode ser escolhido entre os módulos elásticos apresentados. Algumas das possíveis conversões são apresentadas na tabela.

Bibliografia: G. Mavko, T. Mukerji, J. Dvorkin. *The Rock Physics Handbook*. Cambridge University Press 2003 (paperback). ISBN 0-521-54344-4

Nos materiais geológicos ρ, μ e k dependem de :

- Matriz e estrutura das rochas e solos (litologia)
- Porosidade
- Preenchimento dos poros (fluido intersticial)
- Pressão (profundidade)
- Grau de Compactação

Portanto, as velocidades sísmicas também dependem dessas propriedades/características

Existem várias relações empíricas de VP e VS com parâmetros petrofísicos.

EXERCÍCIOS