

6/5/14

Prova 1

Condição da prova

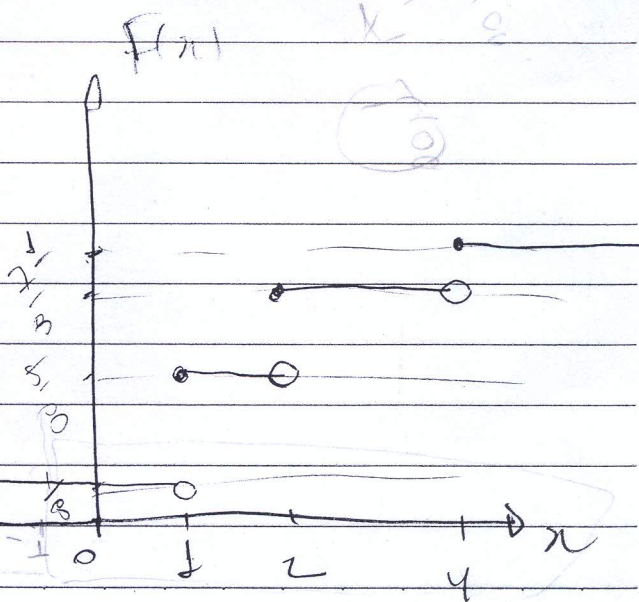
$$① E[X] = \sum_i x_i P[X_i]$$

-2	1	2	4	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -2 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ \frac{5}{8}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ 1, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

$$F(x) = P(X(\omega) \leq x)$$

x	-2	1	2	4
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



06/5/14

$$E[X] = -2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \underline{5/4}$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$$

$$\mu = E[X]$$

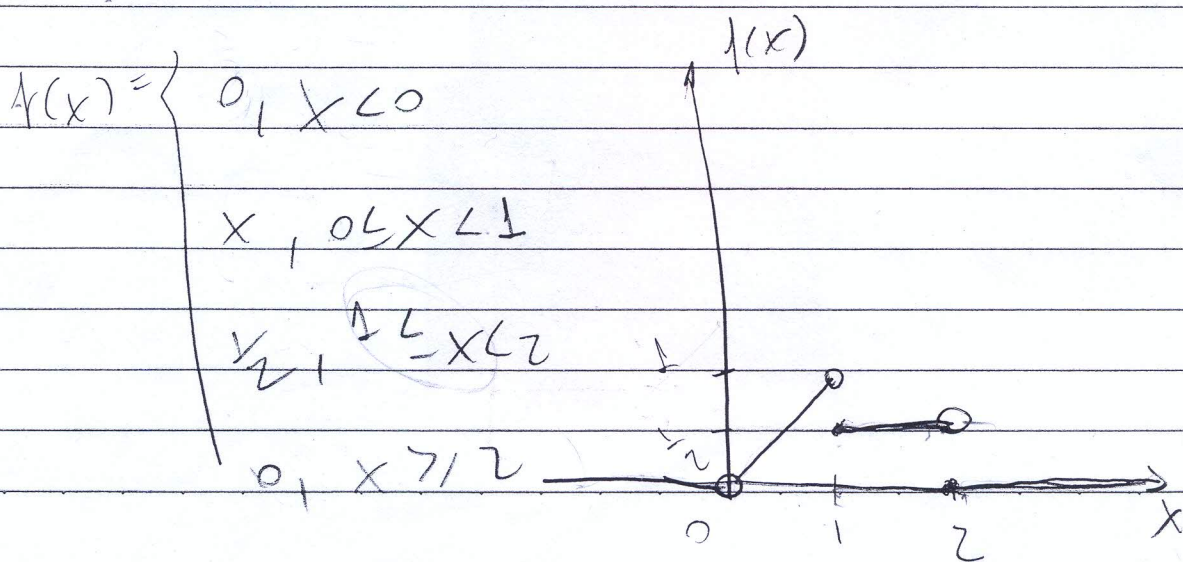
$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = E[X_i^2 \cdot P(X_i)]$$

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} = 4$$

$$\text{Var}[X] = 4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

② $X \rightarrow$ VA contínua com densidade por:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

$F(x)$ = fonction de distribution

$f(x)$ = fonction densité

$$(i) x < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^x 0 dy = 0 = 0 \int_{-\infty}^x dy = 0$$

$$\therefore F(x) = 0 \text{ p/ } x < 0$$

$$(ii) 0 \leq x < 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^0 f(y) dy + \int_0^x f(y) dy = 0 + \int_0^x y dy$$

$$= 0 + \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^x = \frac{x^2}{2} \quad \therefore F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ p/ } 0 \leq x < 1$$

20/5/14

(iii) $1 \leq x < 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^0 f(y) dy + \int_0^1 f(y) dy + \int_1^x f(y) dy =$$

$$+ \int_0^1 y dy + \int_1^x \frac{1}{2} dy = 0 + \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 + \left. \frac{1}{2} y \right|_1^x$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore F(x) = \frac{x}{2}, \quad 1 \leq x < 2$$

iv) $x > 2$

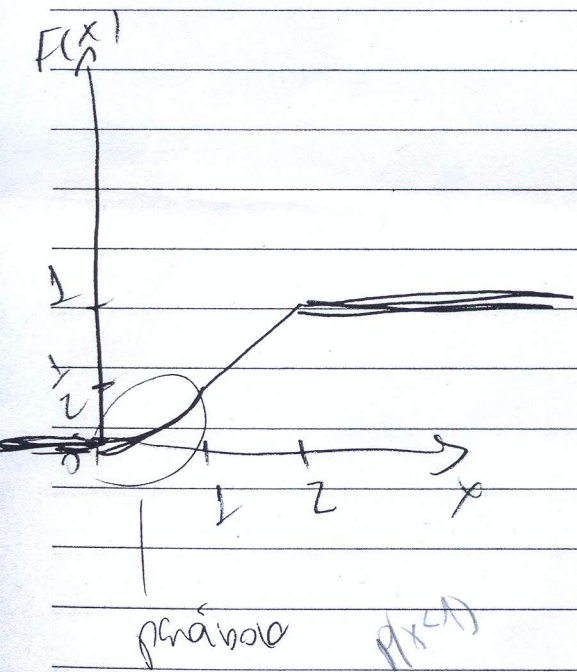
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^0 f(y) dy + \int_0^1 f(y) dy +$$

$$+ \int_1^2 f(y) dy + \int_2^x f(y) dy =$$

$$= 0 + \int_0^1 y dy + \int_1^2 \frac{1}{2} dy + \int_2^x 0 dy = \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 + \left. \frac{1}{2} y \right|_1^2 + 0$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2}, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$



$$\int_2^4 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_2^4 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

b) $P(X < 1) = F(1^-) = \frac{1}{2}$

c) $E(X) = ?$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^2 x \cdot \frac{x^2}{2} dx + \int_2^4 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_4^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx + \int_2^4 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{6} \right]_2^4 = \frac{16}{8} + \left(\frac{64}{6} - \frac{8}{6} \right) = 2 + \frac{56}{6} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$$

2.15.14

2

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{12}$$

$$E[X] = \frac{13}{12}$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 x^2 \cdot x dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx + \int_2^{\infty} x^2 \cdot 0 dx =$$

$$0 + \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{x^3}{2} dx + 0 =$$

$$= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4} + \frac{7}{6} = \frac{17}{12}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{17}{12} - \left(\frac{169}{144} \right) = \frac{35}{144}$$

6/5/14

3) a) Modelo Poisson :

$X \rightarrow$ VA discreta

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$\lambda =$ taxa média anual de tornados *cp.h*

$$= \frac{N^{\circ} \text{ total de tornados}}{N^{\circ} \text{ anos}} = \frac{138 \text{ tornados}}{30 \text{ anos}}$$

$$\lambda = 4,6 \text{ tornados/ano}$$

b) $P(X \geq 1)$ -

$$A = [X \geq 1] \quad (\text{evento } A)$$

$$A^c = [X < 1] \Rightarrow [X = 0] \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{N}, \text{ então} \\ \text{o único} \\ \text{valor que se} \\ \text{vale para } < 1 \\ \text{é } 0 \end{array}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = \frac{e^{-4,6} \cdot 1}{1} = e^{-4,6}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-4,6}$$

6/5/14

c) $A \rightarrow [X > 1]$

$B \rightarrow [X < 5]$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P([X > 1] | [X < 5]) = P(A|B)$$

$$= \frac{e^{-1} \left(\frac{4,6^2}{2} + \frac{4,6^3}{6} + \frac{4,6^4}{24} \right)}{e^{-1} \left(1 + 4,6 + \frac{4,6^2}{2} + \frac{4,6^3}{6} + \frac{4,6^4}{24} \right)}$$

4) temperatura do linho central

Italia a localiza em latitude média

e na época do inverno, as noites escuras

e escalas

Silvicultura

são met

imptis

1. tem escalas de



1. 2,5 dias Gilong 2,5 dias trindades
 não dá para ver uma dependência
 das variáveis
 meteorológicas
 dránes

6/5/14

$$a) P(\text{chuva hj} | \text{chuva ontem}) =$$

$$= \frac{N^{\circ} \text{ dias com chuva consecutiva}}{N^{\circ} \text{ dias com chuva} - 1}$$

$$l = \begin{cases} 0, & \text{se não chover no último dia} \\ 1, & \text{se chover no último dia} \end{cases}$$

$$P(\text{chuva hj} | \text{chuva ontem}) = \frac{10}{14}$$

$$b) P(\text{não chuva hj} | \text{não chuva ontem}) = \frac{11}{16}$$

$$P(\text{chuva num dia qqr}) = \frac{15}{31}$$

9 probabilidade de chover num dia, é maior q chover num anterior

$$\frac{10}{14} > \frac{15}{31} \quad \text{então chover / chover} \\ \text{dia anterior}$$

Nesse caso, não se

se são indep

comparamos a uma gaussiana, por

por teorema do limite central, digamos $y_1, y_2, \dots, y_n$

variáveis aleatórias independentes e idênticas distribuídas $\rightarrow$

6 / 5 / 14

tem valor esperado μ , variância σ^2

Nestas condições,

$$S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{\text{distribuição}} N(0, 1)$$

$$\text{ou } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{distribuição}} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

a distribuição
é normal

é distribuída
normal

mas, como não são independentes
nesse caso, por isso, não são independentes

têm dependência
serial
(dias consecutivos)

Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$

as precipitações
no mês de
Janeiro

a probabilidade
de chover,
tudo que
nos dá
então

chamamos

a prob de chover num dia qm $\left(\frac{10}{14} > \frac{15}{21}\right)$

6 / 5 / 14

A e B são independentes M

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$$

isto n' é
verdade necessariamente