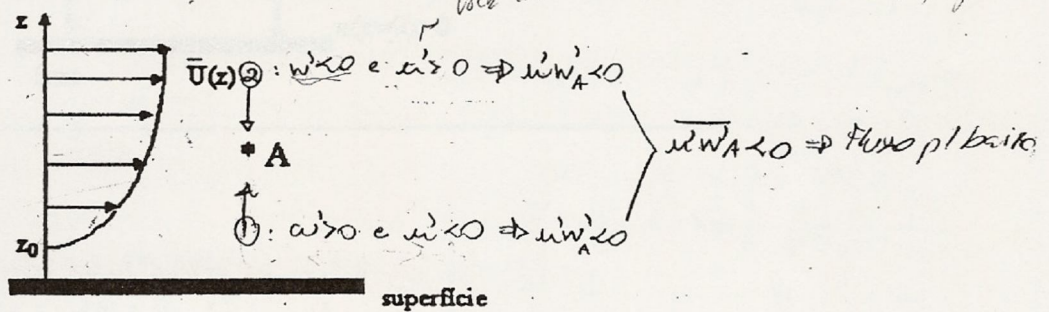


Segunda Prova de Micrometeorologia - 2007

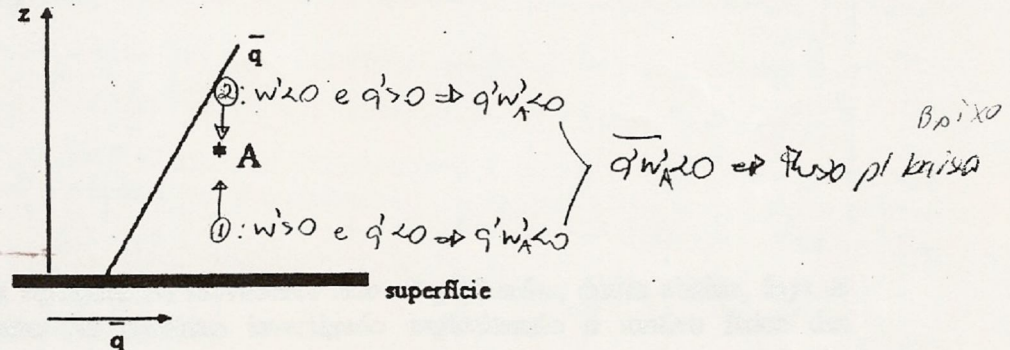
2 horas de prova sem consulta

Questão (1) [2.0]: Considere os perfis verticais médios dos escoamentos turbulentos na CLS descrito abaixo em (a), (b) e (c). Assuma $\bar{w} = 0$. Mostre de forma esquemática as flutuações das propriedades investigada e **EXPLIQUE** o sentido dos fluxos verticais turbulentos no ponto A:

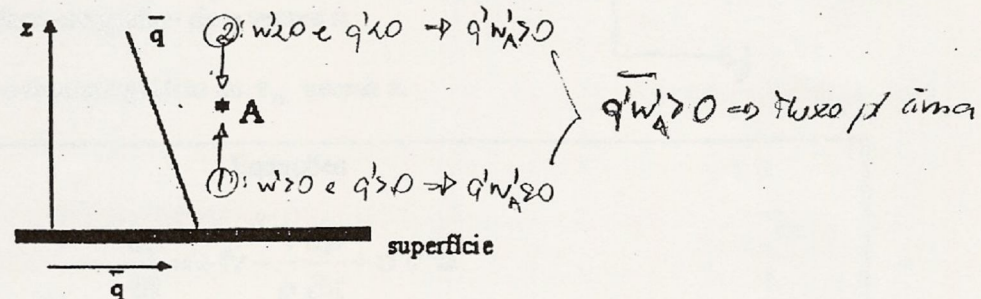
(a)



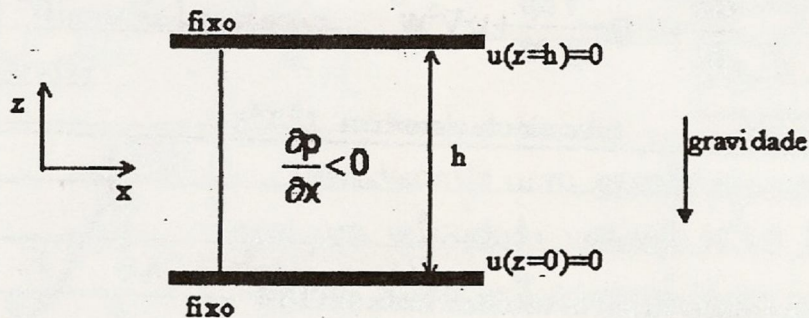
(b)



(c)



(2) [5.0] Considere o problema abaixo:



Onde,

- $u=u(z), v=w=0$

- Movimento estacionário $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$

- Força de Coriolis = 0

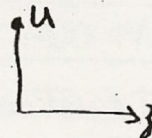
- $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

- $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{cte}$

(a) [2.0] Partindo das equações do movimento *não simplificadas*, dadas abaixo, faça as simplificações pertinentes ao problema investigado explicitando o motivo físico das simplificações.

(b) [1.5] Obtenha u e faça um gráfico de u versus z .

(c) [1.5] Obtenha τ_{xz} e faça um gráfico de τ_{xz} versus z .



Equações

$$\frac{du}{dt} = +fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w$$

onde $\nu = \mu/\rho$ (viscosidade cinemática $L^2 T^{-1}$)

Questão (3) [3.0] A taxa de variação vertical da velocidade média na CLS é:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{kz} \phi_M \left(\frac{z}{L} \right) \quad \text{onde } \phi_M \left(\frac{z}{L} \right) = \begin{cases} \left(1 - \gamma_1 \frac{z}{L} \right)^{1/4} & \text{para } \frac{z}{L} < 0 \text{ (instável)} \\ \left(1 + \beta \frac{z}{L} \right) & \text{para } \frac{z}{L} > 0 \text{ (estável)} \end{cases}$$

$\beta = 4.7$
 $\gamma_1 = 15$

- (a) [1.0] Derive a expressão para o perfil vertical médio na CLS neutra, entre z_0 e z .
 (b) [1.0] Como essa expressão obtida em (a) pode ser utilizada para estimar a tensão de Reynolds?
 (c) [1.0] Mostre que o comprimento de mistura de Prandtl varia linearmente com a altura.

As relações abaixo valem para um escoamento turbulento na CLS sobre uma superfície aerodinamicamente rugosa, rígida, plana, horizontalmente homogênea e com velocidade média na direção x (zonal):

Comprimento de mistura de Prandtl

$$l^2 = \frac{K_M}{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|}$$

Relação fluxo gradiente

$$(\overline{u'w'}) = -K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Tensão de Reynolds

$$\tau_0 = -\rho_0 u_*^2$$

a) Derive a expressão para o perfil vertical médio na CLS neutra.

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{zk}$$

k : von Karman

$$\int_{z_0}^z \frac{d\bar{u}}{dz} = \int_{z_0}^z \frac{u_*}{zk} \Rightarrow \bar{u}(z) - \bar{u}(z_0) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

b) A tensão de Reynolds é dada

$$\tau_0 = \rho u_*^2$$

Relação de



Universidade de São Paulo

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

NOME João Rafael Elias

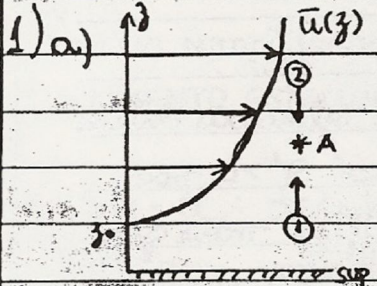
N.º USP 5145092

CURSO Metereologia

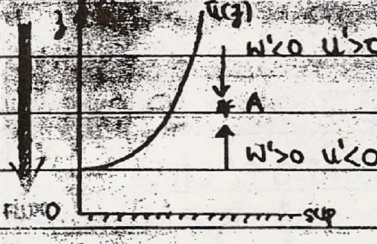
DISCIPLINA Micrometeorologia

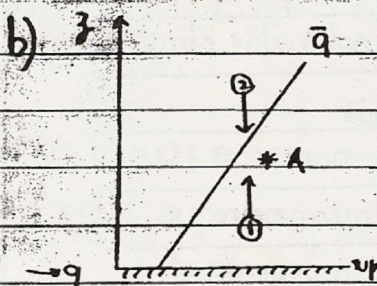
DATA 28/06/07

NOTA	EXAMINADORES.
9,5	

1) a)  Considerando uma parcela que sai de ① temos que sua velocidade vertical $w' > 0$ (uma vez que $\bar{w} = 0$). Essa ao subir introduzirá uma perturbação de velocidade zonal $u' < 0$, pois ela parte de um ponto onde as parcelas possuem uma velocidade zonal $\bar{u}$ menor que a $\bar{u}$ no ponto A. Assim o fluxo vertical turbulento de momento para $u'w' < 0$ uma vez que $u' < 0$ e $w' > 0$.

Aplicando o raciocínio análogo, uma parcela de ar que sai de ② tem uma velocidade vertical $w' < 0$ e introduzirá uma perturbação de velocidade $u' > 0$, uma vez que ela possui uma velocidade maior que a no ponto A. Assim o fluxo também é negativo: $u'w' < 0$ $u' > 0$ e $w' < 0$. Esquemáticamente temos:

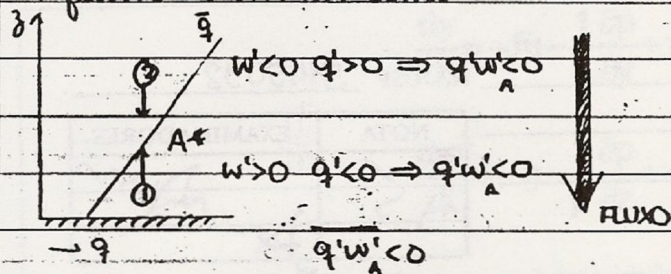
 $w' < 0$ $u' > 0 \Rightarrow u'w' < 0$
 $w' > 0$ $u' < 0 \Rightarrow u'w' < 0$
 Assim o fluxo vertical turbulento de momento será:
 $\overline{u'w'} < 0$
 FLUXO ORIENTADO P/ BAIXO

b)  De forma análoga ao item anterior temos:
 A parcela que parte de ① tem uma velocidade vertical $w' > 0$ e perturba o ponto A com um $q' < 0$ uma vez que sua umidade específica é menor que a observada em A. Assim o fluxo vertical turbulento de umidade específica será $q'w' < 0$ pois $q' < 0$ e $w' > 0$. Já a parcela que sai de ② tem $w' < 0$ e perturba o ponto A com $q' > 0$ pois ela possui uma umidade específica maior que a observada em A.

$\therefore$ Fluxo sempre no sentido para o menor

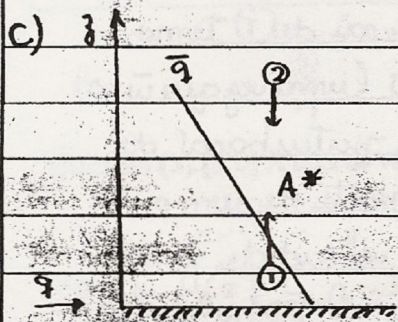
sendo assim $q'w' < 0$ pois $q' > 0$ $w' < 0$.

Esquematicamente temos:



Assim como o fluxo vertical turbulento de umidade específica será $\overline{q'w'_A} < 0$

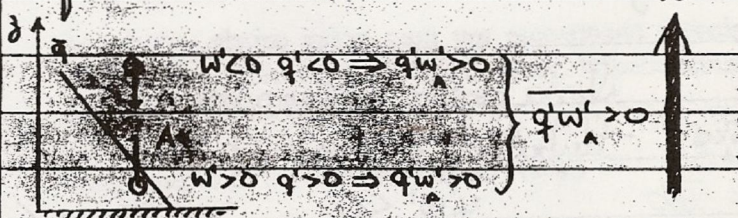
FLUXO ORIENTADO P/ BAIXO



Uma parcela em ascensão terá velocidade vertical $w' > 0$ e causará uma perturbação $q' > 0$ pois ela possui uma umidade específica maior que no ponto A, logo $w' > 0$ e $q' > 0$ onde assim $q'w'_A > 0$.

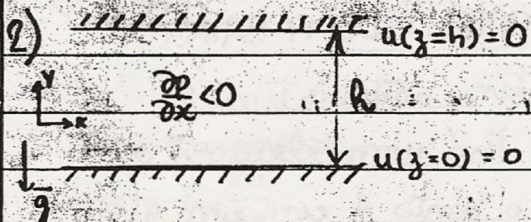
A parcela que tem movimento vertical descendente por sua vez terá $w' < 0$. Uma vez que ela possui uma umidade específica menor que a encontrada em A, ela induzirá uma perturbação de umidade específica em A $q' < 0$. Assim como $q'w'_A > 0$

Esquematicamente:



Logo assim o fluxo vertical turbulento de umidade específica será: $\overline{q'w'_A} > 0$

FLUXO ORIENTADO P/ CIMA



CONSIDERAÇÕES

- $u = u(z)$; $v = w = 0$
- movimentos estacionários
- $f = 0$
- $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g < 0$

a) Partindo das três componentes da equação do movimento temos:

$$\frac{du}{dt} = +fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad \frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w$$

Expandindo os termos obtemos:

$$v = \mu/\rho$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Com as simplificações temos:

• MOVIMENTO ESTACIONÁRIO : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$

• $v = w = 0$: todos os termos que possuem as componentes meridional e vertical desaparecem.

• $f = 0$: $f v = -f u = 0$

• $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$: $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

• $u = u(z)$: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Juntando assim o conjunto de equações acima temos-se:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

As simplificações foram feitas de forma que:

• movimento estacionário : as variáveis locais de velocidade no tempo são nulas.

• $v = w = 0$: o movimento é puramente zonal.

• $f = 0$: o movimento não é influenciado por Coriolis devido a sua escala de comprimento.

• $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$: considerando o movimento puramente zonal, o gradiente em y do potencial não é importante.

• $u = u(z)$: o perfil de u é função da altura.

b) Considerando o conjunto de equações obtido no item anterior temos

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Rightarrow \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right\} \frac{\partial u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$\nu = \mu/\rho$

Uma vez que $\frac{\partial p}{\partial x}$ é constante podemos utilizar a solução:

solução integral $u(z) = a + bz + cz^2 \Rightarrow \frac{du}{dz} = b + 2cz \rightarrow$

lemos então $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2c \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2c = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$ e portanto

$$c = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

Para obtermos os outros coeficientes podemos utilizar as condições do problema: $u(z=0) = 0$ e $u(z=h) = 0$

$$u(z=0) = a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a \Rightarrow u(z=0) = a = 0$$

$$u(z=h) = a + b \cdot h + c \cdot h^2 = bh + ch^2 \Rightarrow u(z=h) = bh + ch^2 = 0$$

$$b = -ch \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) obtemos

$$b = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h \Rightarrow b = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Com isso $u(z)$ é dado por:

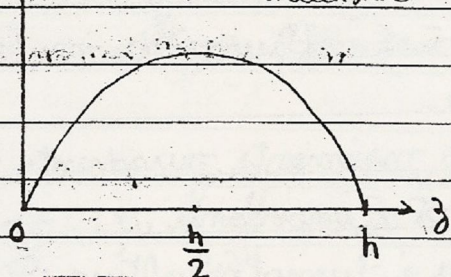
$$u(z) = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2$$

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-h)$$

$\frac{\partial p}{\partial x} < 0 \rightarrow$ porque?

Perfil vertical de $u \times z$

$u(z)$



u

$h/2$



NOME João Rafael Dias

N.º USP 5145092

CURSO _____

DISCIPLINA _____

DATA ____/____/____

NOTA	EXAMINADORES

continuação exercício (2)

c) A taxa de cisalhamento τ_{xz} é dada por:

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u(z) = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2$$

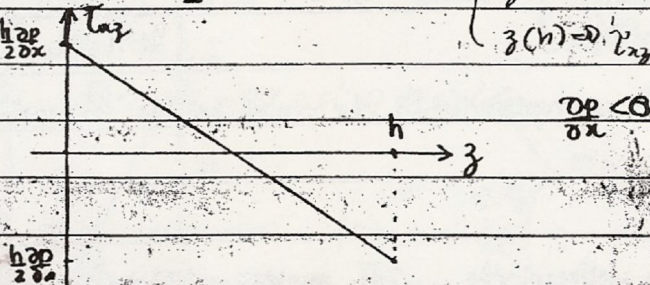
Utilizando $u(z)$ obtido no item anterior temos

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (2z - h) \quad \text{onde } \frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

com isso $\tau_{xz} = \mu \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (2z - h) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2z - h)$

$$\begin{cases} z(0) \rightarrow \tau_{xz} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (+) \\ z(h/2) \rightarrow \tau_{xz} = 0 \\ z(h) \rightarrow \tau_{xz} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (-) \end{cases}$$

Gráfico de $\tau_{xz} \times z$



3) a) Considerando a atmosfera neutra temos que o perfil vertical de velocidade média na CLS é dado por:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$$

Integrando entre z_0 e z obtemos

$$\int_{z_0}^z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz = \int_{z_0}^z \frac{u_*}{kz} dz \Rightarrow \bar{u}(z) - \bar{u}(z_0) = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

mas $\bar{u}(z_0) = 0$, sendo assim

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

PERFIL VERTICAL DA VELOCIDADE
MÉDIA

b) Uma vez que a tensão de Reynolds é dada por (considerando um escoamento zonal):

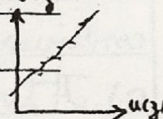
$$\tau_0 = -\rho_0 u_*^2$$

medida ??

Podemos determinar através do perfil vertical de vento o valor da velocidade de atrito u_* e assim conseguiremos estimar τ_0 .

Para isso podemos utilizar medições de $\bar{u}(z)$ e construir um gráfico $\ln z \times \bar{u}(z)$ uma vez que a relação entre as duas é linear:

$$\ln z = \frac{k}{u_*} \bar{u}(z) + \ln z_0 \quad k = \text{cte de von Kármán}$$



Na curva plotada neste gráfico conseguimos através do coeficiente angular da reta obter o valor u_* e assim conseguimos estimar τ_0 .

Analicamente uma expressão (tensão) pode ser usada como

$$\frac{\bar{u}(z)}{k} = \frac{u_*}{\ln(z/z_0)} \Rightarrow u_* = \frac{\bar{u}(z) k}{\ln(z/z_0)} \quad \text{com isso}$$

$$\tau_0 = -\rho_0 \left[\frac{\bar{u}(z) k}{\ln(z/z_0)} \right]^2 \Rightarrow \tau_0 = -\rho_0 k^2 \frac{\bar{u}(z)^2}{[\ln(z/z_0)]^2}$$

c) Na definição de comprimento de mistura de Prandtl temos

$$l^2 = K_H \quad (1)$$

O perfil médio de velocidade

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \quad (2)$$

do gráfico
não está
claro

Uma vez que $\tau_0 = -\rho_0 \bar{u} \bar{w}$ e $\tau_0 = -\rho_0 u_*^2$ temos $\bar{u} \bar{w} = -u_*^2$ (3)

Substituindo (3) na relação fluxos gradientes obtemos $\bar{u} \bar{w} = -k_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$

$$-u_*^2 = -K_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Rightarrow u_*^2 = K_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (4)$$

Combinando (1) com (4) temos

$$K_H = \frac{u_*^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} \Rightarrow l^2 = K_H \Rightarrow l^2 = \frac{u_*^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2}$$

$$u_*^2 = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 \quad (5)$$

$$\text{de (2)}: \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 = \frac{u_*^2}{k^2 z^2} \quad \text{com isso}$$

$$u_*^2 = \frac{l^2 u_*^2}{k^2 z^2} \Rightarrow l^2 = k^2 z^2 \text{ e portanto } l = kz //$$