

**Segunda Prova de Física Matemática I – Soluções**  
(Equações a Derivadas Parciais, Séries e Transformada de Fourier)  
**IFUSP - Dezembro 2018**

**Exercício 1 (Valor 4.0)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{|x|}{2\pi} + \frac{\sin |x|}{2\pi} \right) & \text{se } |x| \leq 2\pi \\ 0 & \text{se } |x| > 2\pi \end{cases}$$

dada por  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  onde  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são, respectivamente, a parte linear e senoidal de  $f(x)$ . Desejamos mostrar que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi \xi^2 (1 - \xi^2)} \quad (1)$$

é a transformada de Fourier de  $f(x)$  e que  $f'(x)$  e  $\hat{f}(\xi)$  são contínuas e limitadas em  $\mathbb{R}$ .

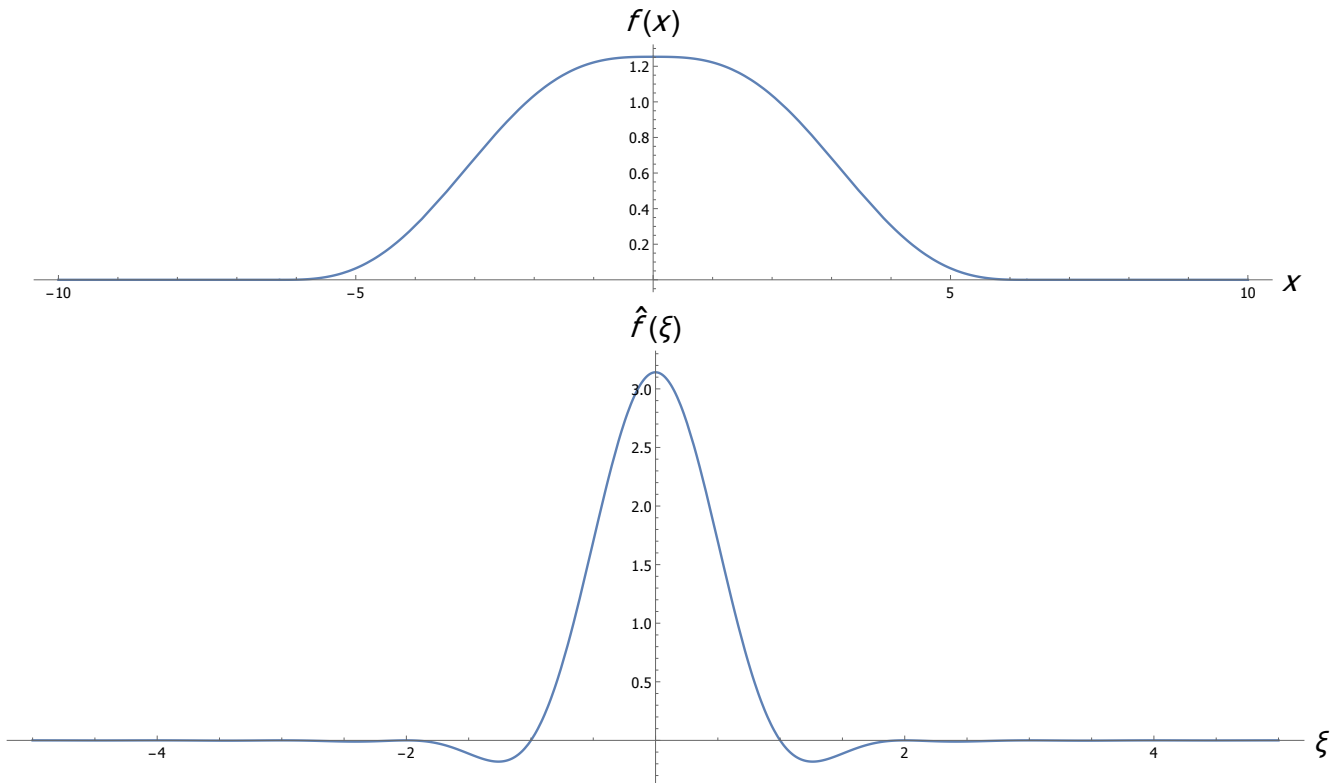


Figure 1: Gráfico das funções  $f(x)$  e  $\hat{f}(\xi)$ .

*i. A transformada de Fourier de  $f$  é dada por*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin |x| e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos \xi x dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(1+\xi)x + \sin(1-\xi)x) dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{1+\xi} (1 - \cos 2\pi(1+\xi)) + \frac{1}{1-\xi} (1 - \cos 2\pi(1-\xi)) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi} \right) (1 - \cos 2\pi\xi) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \pi\xi}{1 - \xi^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

onde usamos a fórmula de Euler  $e^{-i\xi x} = \cos \xi x - i \sin \xi x$  e a paridade da função  $\sin |x|$  para obter a terceira igualdade; na terceira e quinta igualdades empregamos as seguintes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) , \\
\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b ,
\end{aligned}$$

sendo que a última implica em  $\cos 2\pi(1 \pm \xi) = \cos 2\pi\xi$ ; na sexta fizemos uso das identidades

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad e \quad 1 - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta ,$$

para escrever  $1 - \cos 2\pi\xi = 1 - \cos^2 \pi\xi + \sin^2 \pi\xi = 2 \sin^2 \pi\xi$ .

**ii.** Dado que  $\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \pi\xi}{\xi^2}$  é a transformada de Fourier de  $f_1(x)$  e dado que  $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi) + \hat{f}_2(\xi)$ , devido a linearidade da transformação, obtemos a função (1) desejada adicionando  $\hat{f}_1(\xi)$  a (2).

**iii.** A função  $f(x)$  em  $(-2\pi, 2\pi)$  é a soma de duas funções contínuas,  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ , que se anulam nos pontos extremos  $x = \pm 2\pi$  do intervalo. Logo,  $f(x)$  é contínua em  $(-2\pi, 2\pi)$  e se anula nos pontos  $x = \pm 2\pi$ , os quais são pontos de continuidade de  $f(x)$  pois  $f(x) = 0$  se  $|x| > 2\pi$ .

Excluindo os pontos  $x = 0$  e  $\pm 2\pi$ ,  $f(x)$  é diferenciável e

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} + \frac{\cos x}{2\pi} \right) & \text{se } 0 < x < 2\pi \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2\pi} - \frac{\cos x}{2\pi} \right) & \text{se } -2\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se } |x| > 2\pi \end{cases}$$

é contínua. Nos pontos  $x = 0$  e  $\pm 2\pi$ , tomando o limite pela direita e pela esquerda, temos

$$f'(0+) = 0 = f'(0-)$$

$$f'(2\pi+) = 0 = f'(2\pi-)$$

$$f'(-2\pi+) = 0 = f'(-2\pi-) .$$

Logo,  $f'(x)$  é contínua. Claramente, excluindo os pontos  $\xi = 0$  e  $\xi = \pm 1$ ,  $\hat{f}(\xi)$  é contínua e limitada. Nos pontos  $\xi = 0$  e  $\xi = \pm 1$ , tomando os limites à direita e à esquerda e aplicando L'Hopital, temos

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 \pi \xi)'}{\pi (\xi^2(1 - \xi^2))'} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(\sin 2\pi \xi)'}{2(\xi - 2\xi^3)'} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\pi \cos 2\pi \xi}{1 - 6\xi^2} = \pi$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \frac{(\sin^2 \pi \xi)'}{\pi (\xi^2(1 - \xi^2))'} = \lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \frac{\sin 2\pi \xi}{2(\xi - 2\xi^3)} = 0 .$$

De onde se conclui que  $\hat{f}(\xi)$  é contínua e limitada (veja Figura 1).

**iv.** Aplicando o teorema de Plancherel:  $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|^2$  à função  $f_2(x)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi \xi}{(1 - \xi^2)^2} d\xi &= \frac{1}{8\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin^2 |x| dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8\pi} \left( 2\pi - \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{4} , \end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi \xi}{(1 - \xi^2)^2} d\xi = \frac{\pi^2}{4} .$$

**Exercício 2 (Valor 3.0)** Considere o problema de Cauchy (PVI)F

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (3)$$

com  $u(t, 0) = 0, t > 0$ , e

$$u(0, x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = \sin x, \quad x > 0. \quad (4)$$

A solução geral de (3) é  $u(t, x) = F(x + vt) + G(x - vt)$ , onde  $F(x)$  e  $G(x)$  são funções arbitrárias determinadas pelos dados iniciais e de fronteira.

*i.* Para  $x - vt \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} u(0, x) &= F(x) + G(x) = e^{-x} \\ u_t(0, x) &= v(F(x) - G(x))' = \sin x. \end{aligned} \quad (5)$$

Integrando a segunda equação

$$F(x) - G(x) = \frac{-1}{v} \cos x + C$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Resolvendo para  $F(x)$  e  $G(x)$ , temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2v} \cos x + \frac{C}{2} \\ G(x) &= \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2v} \cos x - \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

resultando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} (e^{-x+vt} + e^{-x-vt}) - \frac{1}{2v} (\cos(x + vt) - \cos(x - vt)) \\ &= e^{-x} \cosh vt + \sin x \sin vt. \end{aligned} \quad (7)$$

*ii.* Para  $x - vt < 0$ , usamos a condição de fronteira

$$u(t, 0) = F(vt) + G(-vt) = 0$$

que implica

$$G(-y) = -F(y) = -\frac{1}{2}e^{-y} + \frac{1}{2v} \cos y - \frac{C}{2}$$

para  $y > 0$ , devido a (6). De onde se conclui, juntamente com a solução geral e (6),

$$\begin{aligned} u(t, x) &= F(x + vt) + G(-(vt - x)) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-x-vt} - e^{-vt+x}) - \frac{1}{2v} (\cos(x + vt) - \cos(vt - x)) \\ &= -e^{-vt} \sinh x + \sin x \sin vt. \end{aligned} \quad (8)$$

**iii.** Quanto a paridade das soluções (7) e (8) com respeito a variável  $x$ , a primeira não tem paridade alguma e a segunda é ímpar pois é uma combinação linear de duas funções ímpares,  $\sinh x$  e  $\sin x$ . No caso **i.** a solução não percebeu ainda a fronteira da corda semi-infinita em  $x = 0$ . Sob esta condição, devido a causalidade, o intervalo de influência  $[x - vt, x + vt]$ , projetado sobre o eixo  $x$  pelo setor do passado associado ao ponto  $(t, x)$ , não pode conter a origem:  $x - vt > 0$  implica  $x > vt \geq 0$ . Por outro lado, no caso **ii.** a solução deve manter a origem em repouso, o que obriga tanto a solução (deslocamento da corda em relação ao repouso), quanto sua derivada em relação a  $t$  (velocidade da corda) terem paridade ímpar. Esta paridade é compatível com o fenômeno físico de reflexão da onda ao atingir a fronteira da corda mantida fixa na origem.

Alternativamente, podemos escrever o PVIF original em  $\mathbb{R}_+$  como um PVI em  $\mathbb{R}$  estendendo os dados iniciais (5) como funções ímpares (método das imagens):

$$\tilde{f}(x) = \frac{x}{|x|} e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ -e^x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e  $\tilde{f}(x) = \sin x$ . A solução deste problema é dada pela fórmula de D'Alembert usual,

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x + vt}{|x + vt|} e^{-|x + vt|} + \frac{x - vt}{|x - vt|} e^{-|x - vt|} \right) + \frac{1}{v} \sin x \sin vt \quad (9)$$

para todo  $t \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , reproduzindo o resultado anterior quando restrito a  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , em ambos casos  $x - vt \geq 0$  e  $x - vt < 0$ . Observe que não é possível tomar  $x \leq 0$  e  $t > 0$  na solução anterior (7) sem violar a condição  $x - vt \geq 0$ . A expressão (9) é ímpar por construção.

**Exercício 3 (Valor 3.0)** Considere o problema da condução de calor em uma barra infinita de difusibilidade térmica  $\kappa = 1$ :

$$u_t - u_{xx} - \alpha^2 u = e^{2\alpha^2 t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

com  $u(0, x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $f(x)$  é tal que  $\hat{f}(\xi) = \alpha \sqrt{2/\pi}$ .

**i.** Transformando por Fourier a equação, juntamente com as propriedades de linearidade e  $\widehat{u_{xx}} = i\xi \widehat{u_x} = -\xi^2 \widehat{u}$ ,

$$\begin{aligned} u_t - \widehat{u_{xx}} - \alpha^2 u &= \widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} - \alpha^2 \widehat{u} \\ &= \widehat{u_t} + (\xi^2 - \alpha^2) \widehat{u} = e^{2\alpha^2 t} \hat{f}(\xi) \end{aligned} \quad (11)$$

obtemos uma equação diferencial ordinária para  $\widehat{u}$  de primeira ordem em  $t$ , sujeita a condição inicial:

$$\widehat{u}(0, \xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

**ii.** A solução da equação

$$y' + ay = b(t), \quad t > 0$$

$$y(0) = 0$$

é, pelo método da variação das constantes,

$$y(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds . \quad (13)$$

Tomando  $y = \hat{u}$ ,  $a = \xi^2 - \alpha^2$  e  $b(t) = e^{2\alpha^2 t} \hat{f}(\xi)$  em (13), a solução do PVI dado pelas equações (11) e (12), com  $\xi \in \mathbb{R}$  fixo, é

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, \xi) &= \int_0^t e^{-(\xi^2 - \alpha^2)(t-s)} e^{2\alpha^2 s} \hat{f}(\xi) ds \\ &= \hat{f}(\xi) e^{-(\xi^2 - \alpha^2)t} \int_0^t e^{(\xi^2 + \alpha^2)s} ds \\ &= \hat{f}(\xi) e^{-(\xi^2 - \alpha^2)t} \frac{1}{\xi^2 + \alpha^2} \left( e^{(\xi^2 + \alpha^2)t} - 1 \right) \\ &= \hat{f}(\xi) \frac{1}{\xi^2 + \alpha^2} \left( e^{2\alpha^2 t} - e^{-(\xi^2 - \alpha^2)t} \right) \\ &= e^{2\alpha^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\xi^2 + \alpha^2} - e^{\alpha^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\xi^2 + \alpha^2} \cdot e^{-t\xi^2} \\ &= e^{2\alpha^2 t} \hat{h}(\xi) - e^{\alpha^2 t} \hat{h}(\xi) \cdot \hat{\varphi}(t, \xi) , \end{aligned} \quad (14)$$

onde na quinta e última igualdade usamos  $\hat{f}(\xi) = a\sqrt{2/\pi}$ ,  $\hat{h}(\xi) = \sqrt{2/\pi}a/(\xi^2 + \alpha^2)$  e  $\hat{\varphi}(t, \xi) = e^{-\xi^2 t}$ .

**iii.** Para o primeiro termo de (14), a anti-transformada de Fourier de  $\hat{h}(\xi)$  é

$$h(x) = e^{-|x|} .$$

Para o segundo termo de (14), a anti-transformada de Fourier de  $\hat{h}(\xi) \cdot \hat{\varphi}(t, \xi)$  é, pelo teorema da convolução:  $\widehat{h * \varphi} = \sqrt{2\pi} \hat{h} \cdot \hat{\varphi}$  e dado que  $\hat{\varphi}(t, \xi)$  é a transformada de Fourier de  $\varphi(t, x) = (1/\sqrt{2t}) e^{-x^2/4t}$ ,

$$\begin{aligned} \left( \hat{h} \cdot \hat{\varphi}(t, \cdot) \right)^\vee &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * \varphi(t, x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-a|y|} dy \end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= (\hat{u}(t, \cdot))^{\vee}(x) \\
&= \left( e^{2\alpha^2 t} \hat{h} - e^{\alpha^2 t} \hat{h} \cdot \hat{\varphi}(t, \cdot) \right)^{\vee}(x) \\
&= e^{2\alpha^2 t} \left( \hat{h} \right)^{\vee}(x) - e^{\alpha^2 t} \left( \hat{h} \cdot \hat{\varphi}(t, \cdot) \right)^{\vee}(x) \\
&= e^{2\alpha^2 t} h(x) - e^{\alpha^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * \varphi(t, x) \\
&= e^{2\alpha^2 t - \alpha|x|} - e^{\alpha^2 t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-\alpha|y|} dy .
\end{aligned}$$