Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 1, p. 37 - 61, (2005)
www.sbfisica.org.br

Sobre o princípio da relatividade e suas implicações*

(Uber das Relativtätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen)

A. Einstein

Publicado em Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **4**, 411-462 (1907)

A equação de movimento de Newton mantém sua forma, quando mudamos para um sistema de coordenadas, que está em movimento uniforme de translação em relação ao primeiro, de acordo com as equações

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Enquanto nos ativermos à idéia de que toda a Física poderia ser fundamentada pelas equações de movimento de Newton, não caberia dúvida de que as leis da natureza seriam as mesmas, independentemente dos sistemas de coordenadas movimentando-se relativamente de maneira uniforme, (sem aceleração). Essa independência do movimento em relação ao sistema de coordenadas utilizado, que chamaremos de "princípio da relatividade", foi subitamente questionada pelas brilhantes corroborações para a eletrodinâmica dos corpos em movimento de H.A. Lorentz [1]. Tal teoria está baseada na suposição de um éter luminoso em repouso e sem movimentos internos e suas equações básicas não são tais que se transformam em equações da mesma forma, quando as equações de transformação acima são aplicadas.

Desde a aceitação dessa teoria esperava-se que seria possível demonstrar um efeito do movimento da Terra relativo ao éter em fenômenos ópticos. O próprio Lorentz demonstrou em seu trabalho, como conseqüência de suas hipóteses básicas, que nenhum efeito devido a esse movimento relativo da Terra sobre o caminho óptico seria esperado, desde que os cálculos se limitassem aos termos nos quais a relação v/c da velocidade relativa à velocidade da luz no vácuo fosse linear. No entanto, o resultado negativo do experimento de Michelson e Morley [2] mostrou que efeitos de segunda ordem (proporcionais a v^2/c^2) também estavam ausentes, embora devessem estar presentes de acordo com a teoria de Lorentz para a situação estudada.

É bem conhecido o fato de que tal contradição entre teoria e experimento é removida formalmente pela suposição de H.A. Lorentz e Fitzgerald, de acordo com a qual os corpos em movimento sofrem uma determinada contração na direção do movimento. Tal suposição ad hoc, no entanto, surgiu apenas como um artifício para salvar a teoria, pois o experimento de Michelson e Morley de fato demonstrou que fenômenos seguem o princípio da relatividade, mesmo em âmbitos inesperados para a teoria de Lorentz. Assim parecia que a teoria de Lorentz deveria ser abandonada e reposta por uma teoria cujos fundamentos corresponderiam ao princípio da relatividade, pois tal teoria teria prontamente previsto o resultado negativo do experimento de Michelson e Morley.

Mostrou-se, porém, de maneira surpreendente, que apenas uma definição mais precisa do tempo seria suficiente para superar o problema. Seria necessária apenas a constatação de que a grandeza auxiliar introduzida por H.A. Lorentz, chamada de "tempo local", poderia ser definida simplesmente como "tempo" geral. Atendo-se a essa definição de tempo, verifica-se que as equações básicas da teoria de Lorentz correspondem ao princípio da relatividade, desde que as equações de transformação acima sejam substituídas por outras correspondentes ao novo conceito de tempo. A hipótese de Lorentz e Fitzgerald passa a ser uma conseqüência compulsória dessa teoria. Somente o conceito de um éter luminal como transportador de forças elétricas e magnéticas não cabe na teoria descrita aqui, pois campos eletromagnéticos são descritos agora não como estados de alguma substância, mas como entes que existem independentemente, análogos à "matéria ponderável", tendo com ela em comum a característica da inércia.

A seguir tenta-se resumir, como um todo, os trabalhos surgidos até agora da fusão da teoria de H.A. Lorentz e do princípio da relatividade.

Nas primeiras duas partes do presente trabalho são tratados os fundamentos cinemáticos, bem como suas aplicações às equações básicas da teoria de Maxwell e Lorentz. Nesse propósito ative-me aos trabalhos[1] de

*Tradução de Peter A. Schulz, Instituto de Física Gleb Watgahin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

[1] Os estudos de E. Cohn sobre o tema também são relevantes, mas não os utilizo aqui.

H.A. Lorentz [3] e de A. Einstein [4].

Na primeira seção, na qual são aplicados exclusivamente os fundamentos cinemáticos da teoria, trato também de alguns problemas ópticos (princípio de Doppler, aberração, arraste da luz por corpos em movimento): sobre a possibilidade de tal abordagem fui informado pessoalmente, bem como por meio de um trabalho, pelo senhor M. Laue [5] e também por um trabalho (que aliás necessita correções) do senhor J. Laub [6].

Na terceira parte é desenvolvida a dinâmica de um ponto material (elétrons). Para a dedução das equações de movimento eu utilizo o mesmo método do meu trabalho citado acima. A força é definida como no trabalho de Planck. As reformulações das equações de movimento do ponto material, que mostram tão claramente a analogia com as equações de movimento da mecânica clássica, também são tiradas desse trabalho.

A quarta parte trata dos desdobramentos gerais, em relação à energia e ao momento de sistemas físicos, aos quais a teoria da relatividade conduz. Esses desdobramentos foram desenvolvidos nos trabalhos originais [7, 8], bem como no de M. Planck [9], sendo aqui derivados de um novo modo, que – na minha opinião – tornam especialmente claras as relações entre as aplicações mencionadas e os fundamentos da teoria. A dependência da entropia e da temperatura com o estado do movimento também é tratada aqui; em relação à entropia ative-me totalmente ao trabalho de Planck citado por último, enquanto que a temperatura de corpos em movimento eu defini como senhor Mosengeil no seu trabalho sobre a radiação de corpo negro em movimento [10].

O resultado mais importante dessa quarta parte é o da massa inercial da energia. Esse resultado sugere a questão se a energia também possui massa "pesada" (gravitacional). Mais além, coloca-se a questão se o princípio da relatividade está restrito a sistemas em movimento não acelerados. Para não deixar essas questões completamente no ar, acrescentei ao presente trabalho uma quinta parte, que contém uma nova consideração do ponto de vista da teoria da relatividade sobre aceleração e gravitação.

I - Parte cinemática

§1. Princípio da velocidade da luz constante: Definição do tempo. Princípio da relatividade

Para descrever qualquer fenômeno físico, precisamos ser capazes de medir as mudanças que ocorrem em pontos individuais do espaço como função do tempo e da posição.

Para determinar a posição de um processo, que ocorre durante um intervalo de tempo infinitesimal (evento pontual), em um elemento do espaço precisamos de um sistema de coordenadas cartesiano, isto é, três varas mutuamente perpendiculares e rigidamente atadas entre si, bem como uma vara rígida de unidade de medida[2]. A geometria permite-nos determinar a posição de um ponto, ou seja, a localização de um evento pontual, por meio de três números (coordenadas x, y, z)[3]. Para medir o instante em que o evento ocorre usamos um relógio em repouso em relação ao sistema de coordenadas e na vizinhança onde o evento ocorre. O tempo do evento pontual é definido pela leitura simultânea do relógio.

Imaginemos agora muitos relógios em repouso, em relação ao sistema de coordenadas, fixos em diferentes pontos. Esses relógios são equivalentes, ou seja, a diferença entre a leitura de dois deles permanece inalterada se eles estão posicionados como vizinhos. Pensemos nesses relógios arranjados de tal forma que a totalidade deles, desde que colocados suficientemente perto uns dos outros, permite a medida do tempo de qualquer evento pontual, por meio, digamos, do uso do relógio vizinho.

No entanto, o conjunto de leituras desses relógios não nos fornece ainda um "tempo", como necessário para as finalidades da física. Para isso necessitamos ainda de uma regra de acordo com a qual esses relógios são ajustados uns em relação aos outros.

Agora assumiremos que *os relógios podem ser ajustados de tal modo que a velocidade de propagação de qualquer feixe de luz no vácuo – medido por meio desses relógios – seja em qualquer lugar igual a uma constante universal* c, desde que o sistema de coordenadas não seja acelerado. Sejam A e B dois pontos em repouso, relativamente ao sistema de coordenadas, equipados com relógios e separados por uma distância r: se t_A é a leitura do relógio em A no momento em que o feixe de luz propagando no vácuo na direção AB alcança o ponto A e t_B é a leitura do relógio em B no momento que o feixe alcança B, então devemos ter sempre

$$\frac{r}{t_B - t_A} = c,$$

independentemente do movimento da fonte de emissão da luz ou do movimento de qualquer outro corpo.

Que essa suposição feita aqui, que chamaremos de "princípio da constância da velocidade da luz", ocorra de fato na natureza não é de modo algum evidente, mas – pelo menos para um sistema de coordenadas de um determinado estado de movimento – torna-se plausível pela confirmação da teoria de Lorentz [1], baseada na suposição de um éter absolutamente em repouso, por meio de um experimento[4].

[2] Em vez de falar de corpos rígidos, podemos igualmente usar corpos sólidos que não estão sujeitos a forças de deformação.

[3] Para isso necessitamos ainda de réguas auxiliares.

[4] É de especial relevância que essa teoria forneceu o coeficiente de arrasto (experimento de Fizeau) em acordo com o experimento.

A esse conjunto de leituras de todos os relógios, sincronizados de acordo com a regra acima, que podemos imaginar arranjados em pontos individuais do espaço em repouso em relação ao sistema de coordenadas, chamaremos de tempo pertencente ao sistema de coordenadas ou, abreviadamente, o tempo desse sistema.

O sistema de coordenadas usado, juntamente com a régua unitária de medida e os relógios usados para determinar o tempo do sistema, será chamado de "Sistema referencial S". Vamos supor que as leis físicas são conhecidas em relação ao sistema referencial S, que está inicialmente em repouso em relação ao Sol. Depois disso, o sistema referencial S é acelerado durante um intervalo de tempo por meio de um agente externo, retornado logo após a um estado não acelerado. Como serão as leis físicas se as aplicarmos aos processos relativos ao referencial S que agora está em um outro estado de movimento?

Nós faremos a mais simples das suposições, que é também sugerida pelo experimento de Michelson e Morley: *as leis da Física são independentes do estado de movimento do sistema referencial, ao menos se o sistema não está acelerado.*

Sobre essa suposição, que chamaremos de "princípio da relatividade", bem como sobre o princípio da constância da luz, basear-nos-emos no que segue.

§2. Comentários gerais sobre espaço e tempo

1. Consideremos um grupo de corpos rígidos não acelerados e com a mesma velocidade (portanto em repouso uns em relação aos outros). De acordo com o princípio da relatividade concluímos que as leis de acordo com as quais esses corpos podem ser agrupados, uns em relação aos outros, não se modificam com a modificação dos estados de movimento comum aos corpos. Dessa conclusão segue que as leis da geometria determinam os possíveis arranjos dos corpos rígidos em movimento não acelerado sempre da mesma forma, independentemente do estado de movimento comum. Afirmações sobre a forma de um corpo em referenciais não acelerados têm, portanto, um significado claro. A forma do corpo nesse sentido será chamada de "forma geométrica". Essa obviamente não depende do estado de movimento do sistema referencial.

2. De acordo com a definição de tempo dada em §1, uma afirmação sobre o tempo tem significado apenas em relação ao sistema referencial em um estado de movimento específico. Pode ser, portanto, inferido (e será demonstrado no que segue) que dois eventos pontuais espacialmente distantes, que são simultâneos em um sistema referencial S, são em geral não simultâneos em um sistema referencial S' em um estado de movimento diferente.

3. Considere um corpo constituído de pontos materiais P movendo-se de algum modo em relação a um sistema referencial S. No instante t de S cada ponto material P ocupa uma certa posição em S, isto é, coincide com um certo ponto Π, que está em repouso em relação a S. A totalidade de posições dos pontos Π em relação ao sistema de coordenadas S chamaremos de posição e a totalidade das interrelações de posições de pontos P chamaremos de forma cinemática do corpo em relação a S no tempo t. Se o corpo está em repouso em relação a S, sua forma cinemática será idêntica à forma geométrica.

É claro que observadores em repouso no sistema referencial S podem determinar apenas a forma *cinemática* em relação a S de um corpo que se movimenta em relação a S, mas não a forma geométrica desse corpo.

No que segue não iremos usualmente diferenciar explicitamente formas geométrica e cinemática; uma afirmação de significado geométrico refere-se à forma cinemática ou geométrica, dependendo se aquela se refere ao sistema de referência S ou não, respectivamente.

§3. Transformações de coordenadas e tempo

Sejam S e S' sistemas referenciais equivalentes, isto é, ambos possuem réguas de mesmo comprimento e relógios que avançam à mesma razão, quando esses são comparados entre si em um estado de repouso relativo. É óbvio, então, que todas as leis físicas válidas em relação a S serão válidas de mesmo modo em S' também, desde que S e S' estejam em repouso relativamente um ao outro. O princípio da relatividade requer também essa equivalência total se S' está em movimento de translação uniforme em relação a S. Portanto, especificamente, a velocidade da luz no vácuo tem que ter o mesmo valor numérico em relação a ambos os sistemas.

Seja um evento pontual determinado pelas variáveis x, y, z, t em relação a S, e pelas variáveis x', y', z', t' em relação a S', sendo que S e S' estão se movendo sem aceleração relativamente entre si. Precisamos buscar as equações que relacionam as variáveis de um sistema com as do outro.

Primeiramente podemos afirmar que essas equações precisam ser lineares em relação a essas variáveis, pois isto é requerido pela homogeneidade do espaço e tempo. Disso resulta, em especial, que os planos de coordenadas de S' são planos se movendo uniformemente em relação a S, embora em geral não sejam planos perpendiculares entre si. Se escolhermos, no entanto, a posição do eixo x' de tal forma que em relação a S ele tenha a mesma direção que o movimento translacional de S', então, por razões de simetria, os planos de coordenadas S' têm que ser mutuamente perpendiculares do ponto de vista do referencial S. Podemos e iremos escolher as posições dos dois sistemas de coordenadas de tal modo que o eixo x de S e o eixo x' de S' coincidam em todos os instantes de tempo e que o eixo y' de S' no referencial S seja paralelo ao eixo y de S. Além disso, devemos escolher o instante no qual as origens dos sistemas de coordenadas como o instante inicial em ambos os sistemas. Dessa forma as equações de transformações lineares procuradas serão homogêneas.

Das posições agora conhecidas dos planos de coordenadas de S' em relação a S, concluímos imediatamente que os seguintes pares de equações são equivalentes:

$$\begin{aligned} x' &= 0 \quad \text{e} \quad x - vt = 0 \\ y' &= 0 \quad \text{e} \quad y = 0 \\ z' &= 0 \quad \text{e} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Três das equações de transformação procuradas têm, portanto, a forma:

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt) \\ y' &= by \\ z' &= cz \end{aligned}$$

Como a propagação da velocidade da luz no espaço vazio é c em relação a ambos os referenciais, as duas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

e

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

têm que ser equivalentes. Dessa equivalência e das expressões para x', y', z' concluímos, após um cálculo simples, que as equações de transformação têm que ter a forma

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(v) \cdot \beta \cdot \left[t - \frac{v}{c^2}x\right] \\ x' &= \varphi(v) \cdot \beta \cdot (x - vt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \varphi(v) \cdot y \\ z' &= \varphi(v) \cdot y \end{aligned}$$

nas quais

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Agora iremos determinar a função de v, ainda indeterminada nas expressões acima. Se introduzirmos um terceiro sistema, S", que é equivalente a S e S', movendo-se com velocidade -v em relação a S' e orientado em relação a S' da mesma forma que S' está orientado em relação a S, obteremos, após duas aplicações das equações que acabamos de encontrar,

$$\begin{aligned} t'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot t \\ x'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot x \\ y'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot y \\ z'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot z \end{aligned}$$

Como as origens das coordenadas de S e S" coincidem permanentemente, os eixos têm direções idênticas e os sistemas são " equivalentes", essa substituição é a identidade[5], de modo que

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Além disso, como a relação entre y e y' não pode depender do sinal de v, temos

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Portanto[6], $\phi(v) = 1$ e as transformações passam a ser

$$\begin{aligned} t' &= \beta\left[t - \frac{v}{c^2}x\right] \\ x' &= \beta(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

na qual

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Se resolvermos as Eqs. (1) para x, y, z, e t, obteremos as mesmas equações, com a exceção de que as quantidades "linha" são substituídas pelas correspondentes "sem linha" e vice versa, além de v ser substituído por -v. Isso também é conseqüência direta do princípio da relatividade e do fato de que em relação a S', S realiza uma translação paralela com velocidade -v na direção do eixo X'.

Em geral, de acordo com o princípio da relatividade, qualquer relação correta entre grandezas "linha" (definidas com relação a S') e "sem linha" (definidas em relação a S) ou entre grandezas de apenas um tipo levam novamente a uma relação correta se os símbolos "sem linha" são substituídos por símbolos "linha" ou vice-versa e se v é substituído por -v.

§4. Conseqüências das equações de transformação sobre os corpos rígidos e relógios

1. Considere um corpo em repouso relativo a S'. Sejam x_1', y_1', z_1' e x_2', y_2', z_2' as coordenadas de dois pontos materiais de um corpo em relação a S'. De acordo com as equações de transformação derivadas acima, as seguintes relações entre x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2, coordenadas desses dois pontos no sistema referencial S, mantêm-se para todos os tempos t de S:

[5] Essa conclusão é baseada na suposição física de que o comprimento de uma régua e o período do relógio não sofrem uma alteração permanente se esses objetos são colocados em movimento e então levados ao repouso novamente

[6] $\phi(v) =$ - 1 está obviamente fora de questão.

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(x'_2 - x'_1) \\
y_2 - y_1 &= y'_2 - y'_1 \\
z_2 - z_1 &= z'_2 - z'_1.
\end{aligned} \tag{2}
$$

A forma cinemática de um corpo em movimento translacional uniforme sempre depende, portanto, de sua velocidade em relação ao sistema referencial; de fato a forma cinemática difere da forma geométrica apenas de uma contração na direção do movimento relativo na razão 1: $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. O movimento relativo de sistemas referenciais com velocidades superluminais não é compatível com nossos princípios.

2. Na origem do sistema de coordenadas S' é colocado um relógio em repouso que corre ν_0 vezes mais rápido que os relógios usados para medir o tempo em S e S', ou seja, esse relógio completa ν_0 períodos durante um intervalo de tempo no qual um outro, em repouso relativo a ele e do tipo usado para medir o tempo em S e S', aumenta sua leitura em apenas uma unidade. Quão rápido corre o primeiro relógio se observado do sistema S?

O relógio considerado completa um período nos tempos $t'_n = \frac{n}{\nu_0}$, na qual n cobre os números inteiros e x' $= 0$ para o relógio o tempo todo. Usando as duas primeiras equações de transformação, obtemos para os tempos t_n, durante os quais o relógio completa um período, visto de S:

$$
t_n = \beta t'_n = \frac{\beta}{\nu_0} n.
$$

Portanto, observado do sistema S, o relógio completa $\nu = \frac{\nu_0}{\beta} = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ períodos por unidade de tempo, ou dito de outra forma: a marcação de um relógio movendo-se uniformemente com velocidade v relativa a um sistema de referência é mais lenta de uma razão 1: $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, se observada desse sistema, do que do mesmo relógio em repouso relativo ao sistema.

A fórmula $\nu = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ tem uma aplicação muito interessante. O senhor J. Stark mostrou no ano passado [11] que os íons constituintes de raios de canais[7] emitem linhas espectrais ao observar um desvio nas linhas espectrais, que ele interpretou como devido ao efeito Doppler.

Como o processo de oscilação que corresponde à linha espectral deve ser considerado um processo intra-atômico, cuja freqüência é determinada somente pelo íon, nós podemos considerar esse íon como um relógio de uma certa freqüência ν_0, que pode ser determinada, por exemplo, pela investigação da luz emitida por íons idênticos em repouso em relação ao observador. Essa consideração mostra, portanto, que o efeito do movimento sobre a freqüência da luz, a ser determinado pelo observador, não é dado completamente pelo efeito Doppler. O movimento também reduz a (aparente) freqüência própria dos íons emissores, de acordo com a relação dada acima[8].

§5. O teorema de adição de velocidades

Considere um ponto movendo-se uniformemente em relação ao sistema S' de acordo com as equações

$$
\begin{aligned}
x' &= u'_x t' \\
y' &= u'_y t' \\
z' &= u'_z t'
\end{aligned}
$$

Se x', y', z', t' forem substituídos por suas expressões em x, y, z, t com o auxílio das equações de transformação (1), obteremos x, y, z como funções de t e, portanto, as componentes de velocidade u_x, u_y, u_z em relação a S do ponto em movimento. Teremos, portanto

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \\
u_y &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} u'_y \\
u_z &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} u' z
\end{aligned} \tag{3}
$$

A lei dos paralelogramos das velocidades é válida, portanto, apenas em primeira aproximação. Se escrevermos

$$
\begin{aligned}
u^2 &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \\
u'^2 &= {u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2
\end{aligned}
$$

e designarmos por α o ângulo entre o eixo x' (v) e a direção de movimento do ponto em relação a S' (u'), teremos

$$
u = \frac{\sqrt{(v^2 + u'^2 + 2vu'\cos\alpha) - \left[\frac{vu' sen\alpha}{c^2}\right]^2}}{1+\frac{vu'\cos\alpha}{c^2}}
$$

Se as duas velocidades (v e u') tem a mesma direção, teremos

$$
u = \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}}
$$

Dessa última expressão vemos que a adição de duas velocidades menores que c sempre resulta em uma velocidade menor que c, isto é, se definirmos $v = c - k$, k' $= c - \lambda$, com k e λ positivos e menores que c, então

[7] N.T.: trata-se de um efeito de raios catódicos " kanalstrahlen", ver Braz. J. Phys. **29**, 401 (1999) (N.T.).

[8] Veja também, §6, Eq. (4a).

$$u = c\frac{2c - k - \lambda}{2c - k - \lambda + \frac{k\lambda}{c}} < c.$$

Uma conseqüência adicional é que a adição da velocidade da luz c a uma "velocidade subluminar" resulta novamente na velocidade da luz.

Do teorema de adição das velocidades chega-se também à interessante conclusão de que não existe um sistema arbitrário de sinalização e que se propague mais rápido que a luz no vácuo. Por exemplo, considere uma faixa de algum material esticada ao longo do eixo x de S, relativa à qual um certo efeito (do ponto de vista da faixa) se propaga com velocidade W. Considere também dois observadores, um deles no ponto $x = 0$ (ponto A) e o outro no ponto $x = \lambda$ (ponto B) do eixo x e que estão em repouso em relação a S. O observador em A envia um sinal, por meio do efeito mencionado acima, ao observador em B através da faixa material, que não está em repouso, mas movendo-se na direção x *negativa* com velocidade v ($< c$). Como conseqüência da primeira das Eqs. (3), o sinal será transmitido de A para B com velocidade $\frac{W-v}{1-\frac{Wv}{c^2}}$. O tempo T necessário para essa transmissão será, portanto[9],

$$T = l\frac{1 - \frac{Wv}{c^2}}{W - v}.$$

A velocidade v pode assumir qualquer valor menor que c. Portanto, se assumirmos $W > c$, podemos sempre escolher v tal que $T < 0$. Esse resultado significa que teríamos que considerar a possibilidade de um mecanismo de transmissão pelo qual o efeito alcançado precederia a causa. Ainda que esse resultado, na minha opinião, não contenha nenhuma contradição de um ponto de vista puramente lógico, provocará sim um conflito com o caráter de toda a nossa experiência adquirida, que me parece prova suficiente da impossibilidade da hipótese $W > c$.

§6. Aplicação das equações de transformação a alguns problemas de óptica

Suponha que uma componente de uma onda plana de luz que se propaga no vácuo é proporcional a

$$sen\omega\left[t - \frac{lx + my + nz}{c}\right]$$

em relação ao sistema S e

$$sen\omega'\left[t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c}\right]$$

em relação a S'. As equações de transformação desenvolvidas em §3 requerem as seguintes relações entre as quantidades ω, l, m, n e ω', l', m', n':

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\beta\left[1 - l\frac{v}{c}\right] \\ l' &= \frac{l - \frac{v}{c}}{1 - l\frac{v}{c}} \\ m' &= \frac{m}{\beta\left[1 - l\frac{v}{c}\right]} \\ n' &= \frac{n}{\beta\left[1 - l\frac{v}{c}\right]} \end{aligned} \qquad (4)$$

Iremos interpretar a expressão para ω' de duas maneiras diferentes, dependendo se considerarmos o observador em movimento e a fonte de luz (infinitamente distante) parada, ou vice-versa.

1. Se um observador se move com velocidade v relativa a uma fonte de luz de freqüência ν infinitamente distante, de tal forma que a linha conectando a fonte de luz ao observador forma um ângulo ϕ com a velocidade do observador do ponto de vista de um sistema de coordenadas em repouso em relação à fonte de luz, então a freqüência ν' da fonte de luz percebida pelo observador é dada pela equação

$$\nu' = \nu\frac{1 - \cos\varphi\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

2. Se uma fonte de luz de freqüência ν_0 relativa a um sistema que se move junto com essa fonte de tal forma que a linha conectando a fonte ao observador forma um ângulo ϕ com a velocidade da fonte de luz em relação a um sistema em repouso relativo ao observador, então a freqüência ν da fonte percebida pelo observador é dada pela equação

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \cos\varphi\frac{v}{c}}.$$

Essas últimas duas equações expressam o princípio de Doppler em sua forma geral; a última equação mostra como a freqüência observável da luz emitida (ou absorvida) por raios de canal depende da velocidade de movimento dos íons que formam os raios e da direção de observação.

Se os ângulos entre a direção de propagação (direção do raio) e a direção do movimento relativo de S' em relação a S (ou seja, com o eixo x e x', respectivamente) são denominados ϕ e ϕ', [quando medidos em S e S', respectivamente][10], então a Eq. de l' toma a forma

[9] No original aparece l em vez de λ (N.T.).

[10] O trecho entre colchetes falta no original, mas é necessário acrescentar para dar sentido à frase. Comparar a equação a seguir com a expressão para l' em (4) (N.T.).

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1-\cos\varphi\frac{v}{c}}.$$

Essa equação mostra o efeito do movimento relativo de um observador sobre a posição aparente de uma fonte de luz infinitamente distante (aberração).

Adicionalmente, iremos examinar quão rápida a luz se propaga em um meio que se move na direção do raio luminoso. Consideremos o meio em repouso em relação ao sistema S' e o vetor de luz proporcional a

$$sen\omega'\left[t' - \frac{x'}{V}\right]$$

ou a

$$sen\omega\left[t - \frac{x}{V}\right],$$

dependendo se o processo se refere a S' ou S, respectivamente.

As equações de transformação levam a

$$\omega = \beta\omega'\left[1+\frac{v}{V'}\right]$$

$$\frac{\omega}{V} = \beta\frac{\omega'}{V'}\left[1+\frac{V'v}{c^2}\right]$$

Aqui V' deve ser considerada como uma função de ω', como conhecido da óptica de corpos estacionários. Dividindo essas equações, obtemos

$$V = \frac{V'+v}{1+\frac{V'v}{c^2}}.$$

Essa equação também poderia ser obtida diretamente do teorema de adição de velocidades [12]. Se V' for considerada conhecida, essa última equação resolve o problema completamente. No entanto, se somente a freqüência (ω) em referência ao sistema "estacionário" S é considerada conhecida, como no experimento bem conhecido de Fizeau, então as duas equações anteriores têm que ser utilizadas juntamente com a relação entre ω' e V' para poder determinar as três incógnitas ω', V' e V.

Além disso, se G ou G' é a velocidade de grupo em relação a S ou S', respectivamente, então, de acordo com o teorema de adição das velocidades,

$$G = \frac{G'+v}{1+\frac{G'v}{c^2}}.$$

Como a relação entre G' e ω' pode ser obtida da óptica de corpos estacionários[11] e ω' pode ser calculada de ω de acordo com o visto acima, a velocidade de grupo G pode ser calculada, mesmo no caso em que somente a freqüência da luz relativa a S e a natureza e velocidade do corpo em movimento forem conhecidas.

II. Parte eletrodinâmica

§7. Transformação das equações de Maxwell-Lorentz

Tomaremos como ponto de partida as equações

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\\ \frac{1}{c}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\\ \frac{1}{c}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\end{aligned} \tag{6}$$

Nessas equações[12], (X, Y, Z) é o vetor "intensidade de campo elétrico", (L, M, N) é o vetor "intensidade de campo magnético", $\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ é a densidade de carga multiplicada por 4π e (u_x, u_y, u_z) é o "vetor velocidade da eletricidade".

Essas equações, juntamente com a suposição de que as cargas elétricas são imutáveis e ligadas a pequenos corpos rígidos (íons, elétrons), fornecem os fundamentos da eletrodinâmica de Lorentz e a óptica dos corpos em movimento.

Se essas equações, que são válidas em relação ao sistema S, forem transformadas pela aplicação das equações de transformação (1) para o sistema em movimento S', que se move em relação a S como nas considerações anteriores, obteremos as seguintes equações

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\left\{u'_x\rho' + \frac{\partial X'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}\\ \frac{1}{c}\left\{u'_y\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'}\\ \frac{1}{c}\left\{u'_z\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial z'}\end{aligned} \tag{5'}$$

[11] Porque $G' = \frac{V'}{1+\frac{1}{V'}\frac{dV'}{d\omega'}}$

[12] As Eqs. (5) são as componentes da lei de Ampere e as Eqs. (6) as componentes da lei de Faraday. É interessante conservar a notação original, bem como a terminologia como " vetor velocidade da eletricidade" em vez de densidade de corrente (N.T.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'}.\end{aligned} \qquad (6')$$

Nessas equações são adotadas as seguintes definições:

$$\begin{aligned} X' &= X\\ Y' &= \beta\Big(Y - \frac{v}{c}N\Big)\\ Z' &= \beta\Big(Z + \frac{v}{c}M\Big)\end{aligned} \qquad (7a)$$

$$\begin{aligned} L' &= L\\ M' &= \beta\Big(M + \frac{v}{c}Z\Big)\\ N' &= \beta\Big(N - \frac{v}{c}Y\Big)\end{aligned} \qquad (7b)$$

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} = \beta\Big(1 - \frac{vu_x}{c^2}\Big)\rho \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\\ u'_y &= \frac{u_y}{\beta\,(1 - \frac{u_x v}{c^2})}\\ u'_z &= \frac{u_z}{\beta\,(1 - \frac{u_x v}{c^2})}\end{aligned} \qquad (9)$$

Essas equações têm a mesma forma das Eqs. (5) e (6). Por outro lado, de acordo com o princípio da relatividade, os processos eletrodinâmicos obedecem às mesmas leis tanto em relação ao sistema S' como em relação ao sistema S. Disso concluímos que X', Y', Z' e L', M', N', nada mais são, respectivamente, que as componentes das "intensidades dos campos elétrico e magnético relacionadas ao sistema S' "[13]. Além disso, a inversão das Eqs. (3) mostra que as quantidades u'_x, u'_y, u'_z nas equações são as componentes da "velocidade da eletricidade"[14] em relação a S' e, portanto, ρ' é a "densidade da eletricidade"[15] em relação a S'. Assim a base da teoria de Maxwell-Lorentz está de acordo com o princípio da relatividade.

Para a interpretação das Eqs. (7) nota-se o seguinte. Imagine uma "quantidade pontual de eletricidade"[16] que esteja em repouso em relação a S e é de magnitude "um" em S, ou seja, exerce a força de 1 dina sobre uma quantidade igual de eletricidade localizada a 1 cm e em repouso em relação a S. De acordo com o princípio da relatividade, essa "massa"[17] elétrica também é igual a "um", quando em repouso em relação a S' examinada de S'[18]. Se essa "quantidade de eletricidade" está em repouso em relação a S, então (X, Y, Z) é igual, por definição, à força agindo sobre ela, que poderia ser medida, por exemplo, por uma balança de mola em repouso em S. O vetor (X', Y', Z') tem um significado análogo em respeito a S'.

De acordo com as Eqs. (7a) e (7b), campos elétricos e magnéticos não têm uma existência em si, já que dependem da escolha do sistema de coordenadas se existe ou não um campo elétrico ou magnético em uma dada posição (mais exatamente: ambiente espaço-temporal de um evento pontual). Além disso, se um sistema referencial em repouso em relação à carga elétrica é introduzido, vê-se que as forças "eletromotrizes" que passam a agir sobre a carga movendo-se em um campo magnético, nada mais são que forças "elétricas". Isso torna a questão sobre a origem dessas forças eletromotrizes (em máquinas unipolares) irrelevante, pois a resposta depende da escolha do estado de movimento do sistema referencial usado.

O significado da Eq. (8) pode ser inferido do que segue. Um corpo carregado eletricamente está em repouso em relação a S'. Sua carga total ε' do ponto de vista de S' é $\int \frac{\rho'}{4\pi} dx'dy'dz'$. Qual será sua carga total ε em um dado instante t de S?

Da última das equações em (1) temos que a seguinte relação para t constante é válida:

$$dx'dy'dz' = \beta dxdydz.$$

Em nosso caso a Eq. (8) significa

$$\rho' = \frac{1}{\beta}\rho.$$

Dessas duas equações concluímos que temos necessariamente

$$\varepsilon' = \varepsilon.$$

A Eq. (8) afirma, portanto, que a carga elétrica é uma grandeza que é independente do estado de movimento do sistema referencial. Portanto, se a carga de

[13] O acordo entre essas equações e as Eqs. (5) e (6) deixa, no entanto, aberta a possibilidade de que as grandezas X', etc., difiram de um fator constante das intensidades de campo relativas a S'. Que esse fator é necessariamente 1 é facilmente demonstrável por um método análogo ao empregado em §3. para a função $\phi(v)$.

[14] Velocidade das cargas elétricas (N.T.).

[15] Densidade de carga (N.T.).

[16] Carga pontual (N.T.).

[17] Mais uma terminologia curiosa para leitores de hoje: massa em vez de carga (N.T.).

[18] Essa conclusão baseia-se na suposição de que a magnitude da carga elétrica não depende da história anterior de seu movimento.

um corpo é constante do ponto de vista de um sistema referencial movendo-se com esse corpo, então a carga também é constante em relação a qualquer outro sistema referencial.

Com o auxílio das Eqs. (1), (7), (8), e (9), todos os problemas de eletrodinâmica e óptica de corpos em movimento, nos quais apenas velocidades, mas não acelerações, desempenham um papel essencial, podem ser reduzidos a uma série de problemas de eletrodinâmica ou óptica para corpos estacionários.

Iremos ilustrar a aplicação dessas equações com um exemplo simples. Uma onda de luz plana propagando-se no vácuo é descrita pelas seguintes equações em relação a S:

$$\begin{aligned} X &= X_0 sen\Phi \\ Y &= Y_0 sen\Phi \\ Z &= Z_0 sen\Phi \\ L &= L_0 sen\Phi \\ M &= M_0 sen\Phi \\ N &= N_0 sen\Phi \\ \Phi &= \omega\left(t - \frac{lx+my+nz}{c}\right). \end{aligned}$$

Perguntamo-nos agora sobre a composição dessa onda com respeito a S'.

Aplicando as equações de transformação (1) e (7), obtemos

$$\begin{aligned} X' &= X_0 sen\Phi' \\ Y' &= \beta\left(Y_0 - \frac{v}{c}N_0\right) sen\Phi' \\ Z' &= \beta\left(Z_0 + \frac{v}{c}M_0\right) sen\Phi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' &= L_0 sen\Phi' \\ M' &= \beta\left(M_0 + \frac{v}{c}Z_0\right) sen\Phi' \\ N' &= \beta\left(N_0 - \frac{v}{c}Y_0\right) sen\Phi' \end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega'\left(t' - \frac{l'x'+m'y'+n'z'}{c}\right).$$

Da condição de que as funções X' etc. têm que satisfazer as Eqs. (5') e (6'), segue que a direção de propagação da onda, campo elétrico e campo magnético são vetores mutuamente perpendiculares no sistema S' e os dois últimos são iguais. As relações que advêm da identidade Φ' = Φ foram discutidas em §6. Apenas a amplitude e a polarização da onda no sistema S' precisam ainda ser determinados.

Escolhemos o plano $X - Y$ paralelo à direção de propagação da onda e analisaremos primeiro o caso em que as oscilações elétricas são paralelas ao eixo Z. Nesse caso impomos que

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 & L_0 &= -A sen\varphi \\ Y_0 &= 0 & M_0 &= -A\cos\varphi \\ Z_0 &= A & N_0 &= 0 \end{aligned}$$

na qual ϕ representa o ângulo entre a direção de propagação da onda e o eixo X. Dessas definições segue que

$$\begin{aligned} X' &= 0 & L' &= -A sen\varphi sen\Phi' \\ Y' &= 0 & M' &= \beta\left(-\cos\varphi + \frac{v}{c}\right) A sen\Phi' \\ Z' &= \beta\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right) A sen\Phi' & N' &= 0 \end{aligned}$$

A amplitude da onda, A', em relação a S' é dada por

$$A' = A\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10}$$

Para o caso especial no qual o campo magnético é perpendicular à direção de movimento relativo e à direção de propagação, a mesma relação é obviamente mantida. Como desses dois casos especiais podemos construir um caso geral por superposição, concluímos que a Eq. (10) tem validade geral na introdução de um referencial S' e que o ângulo entre o plano de polarização e o plano definido pela direção de propagação e a direção do movimento relativo é o mesmo em ambos os referenciais.

III. Mecânica de um ponto material (elétron)

§8. Derivação das equações de movimento de um ponto material (lentamente acelerado), ou do elétron

Em um campo eletromagnético move-se uma partícula com carga elétrica ε (que será chamada daqui em diante de "elétron") e sobre sua lei de movimento pode-se dizer o que segue:

Se o elétron encontra-se em repouso em um dado instante de tempo em relação ao sistema S' (não acelerado), seu movimento em relação a S' dar-se-á de acordo com as seguintes equações, no instante de tempo seguinte,

$$\begin{aligned} \mu\frac{d^2x'_0}{dt'^2} &= \varepsilon X' \\ \mu\frac{d^2y'_0}{dt'^2} &= \varepsilon Y' \\ \mu\frac{d^2z'_0}{dt'^2} &= \varepsilon Z' \end{aligned}$$

nas quais x'_0, y'_0, z_0' representam as coordenadas do elétron em relação a S' e μ uma constante que chamaremos de massa do elétron.

Introduziremos um sistema S, em relação ao qual o sistema S' está em movimento, como nas nossas considerações anteriores, e transformaremos as equações de movimento usando as equações de transformação (1) e (7a).

As primeiras no presente caso são

$$\begin{aligned} t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x_0\right) \\ x_0' &= \beta\,(x_0 - vt) \\ y_0' &= y_0 \\ z_0' &= z_0. \end{aligned}$$

Dessas equações e definindo $\frac{dx_0}{dt} = \dot{x}_0$, etc. deduzimos:

$$\frac{dx_0'}{dt'} = \frac{\beta(\dot{x}_0 - v)}{\beta\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)} etc.,$$

$$\frac{d^2x_0'}{dt'^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left\{\frac{dx_0'}{dt'}\right\}}{\beta\left(1 - \frac{v\dot{x}_0'}{c^2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)\ddot{x}_0 + (\dot{x}_0 - v)\frac{v\ddot{x}_0}{c^2}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)} \quad \text{etc.}$$

Inserindo essas expressões nas equações de movimento para o elétron, definindo $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ e ao mesmo tempo substituindo *X', Y', Z'* por meio das Eqs. (7a), obtemos

$$\begin{aligned} \mu\beta^3\ddot{x}_0 &= \varepsilon X \\ \mu\beta^3\ddot{y}_0 &= \varepsilon\left(Y - \frac{v}{c}N\right) \\ \mu\beta^3\ddot{z}_0 &= \varepsilon\left(Z + \frac{v}{c}M\right). \end{aligned}$$

Essas equações são as equações de movimento do elétron para o caso em que $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ no instante em questão. No lado esquerdo, portanto, v pode ser substituído pela velocidade q, definida por

$$q = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}$$

e no lado direito v pode ser substituído por $\dot{x}_0$. Além disso, colocaremos nos lugares apropriados os termos obtidos de $\frac{\dot{x}_0}{c}M$ e $-\frac{\dot{x}_0}{c}N$ por meio de permutações cíclicas, que serão cancelados no caso particular em questão. Omitindo o índice em x_0, obteremos as seguintes equações, que no caso considerado são equivalentes às equações acima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}\right\} &= K_x \\ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}\right\} &= K_y \\ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}\right\} &= K_z, \end{aligned} \qquad (11)$$

nas quais definimos

$$\begin{aligned} K_x &= \varepsilon\left\{X + \frac{\dot{y}}{c}N - \frac{\dot{z}}{c}M\right\} \\ K_y &= \varepsilon\left\{Y + \frac{\dot{z}}{c}L - \frac{\dot{x}}{c}N\right\} \\ K_z &= \varepsilon\left\{Z + \frac{\dot{x}}{c}M - \frac{\dot{y}}{c}L\right\}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Essas equações não modificam sua forma com a introdução de um novo sistema de coordenadas com eixos em direções diferentes e que está relativamente em repouso. Portanto, essas equações têm validade geral e não apenas para $\dot{y} = \dot{z} = 0$.

O vetor (K_x, K_y, K_z) será identificado como a força agindo sobre o ponto material. Se q^2 é muito pequeno comparado a c^2, de acordo com as Eqs. (11), K_x, K_y, K_z reduzem-se às componentes de uma força segundo a definição de Newton. Na próxima seção será demonstrado que, também em outros aspectos, esse vetor tem o mesmo papel na mecânica relativística que a força na mecânica clássica.

Vamos manter as Eqs. (11) também no caso em que a força exercida sobre o ponto material não é de natureza eletromagnética. Nesse último caso as Eqs. (11) não tem um conteúdo físico, mas devem ser entendidas como uma definição de força.

§9. Movimento da massa pontual e os princípios da mecânica

Se multiplicarmos as Eqs. (5) e (6) sucessivamente por $\frac{X}{4\pi}, \frac{Y}{4\pi} \ldots \frac{N}{4\pi}$, e integrarmos sobre um volume em cuja fronteira as intensidades dos campos se anulam, obtemos

$$\int \frac{\rho}{4\pi}\left(u_xX + u_yY + u_zZ\right)d\omega + \frac{dE_e}{dt} = 0, \qquad (13)$$

na qual

$$E_e = \int\left[\frac{1}{8\pi}\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) + \frac{1}{8\pi}\left(L^2 + M^2 + N^2\right)\right]d\omega$$

é a energia eletromagnética contida no volume considerado. De acordo com o princípio da energia, o primeiro termo na Eq. (13) é igual à energia fornecida pelo campo eletromagnético ao portador de carga elétrica por unidade de tempo. Se cargas elétricas estão rigidamente ligadas a pontos materiais (elétrons), então sua parte no termo acima se iguala à expressão

$$\varepsilon\left(X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}\right),$$

na qual (X, Y, Z) representa o campo elétrico externo, isto é, o campo menos a parte correspondente à carga do elétron em si. Utilizando as Eqs. (12) essa expressão torna-se

$$K_x\dot{x}+K_y\dot{y}+K_z\dot{z}.$$

Portanto, o vetor $(K_x,\ K_y,\ K_z)$ designado como "força" no último parágrafo (seção) tem a mesma relação com o trabalho realizado como na mecânica newtoniana.

Assim, se sucessivamente multiplicarmos as Eqs. (11) por $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, somarmos os termos e integrarmos sobre o tempo, deveremos obter a energia cinética do ponto material (elétron):

$$\int (K_x\dot{x}+K_y\dot{y}+K_z\dot{z})dt = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \text{const.} \tag{14}$$

Assim fica demonstrado que as equações de movimento (11) estão de acordo com o princípio da energia. Vamos agora mostrar que elas também estão de com o princípio de conservação do momento.

Multiplicando a segunda e a terceira das Eqs. (5) e depois a segunda e terceira das Eqs. (6) por $\frac{N}{4\pi}, -\frac{M}{4\pi}, -\frac{Z}{4\pi}, \frac{Y}{4\pi}$, somando os termos e integrando sobre um volume em cuja fronteira os campos se anulam, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN-ZM)d\omega\right] + \int \frac{\rho}{4\pi}\left[X+\frac{u_y}{c}N-\frac{u_z}{c}M\right]d\omega = 0 \tag{15}$$

ou, de acordo com as Eqs. (12),

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN-ZM)d\omega\right] + \sum K_x = 0. \tag{15a}$$

Se a carga elétrica está presa a um ponto material que se move livremente (elétron), essa equação, através de (11), transforma-se em

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN-ZM)d\omega\right] + \sum \frac{u\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = 0. \tag{15b}$$

Em conjunto com as equações obtidas por permutação cíclica, essas equações expressam o princípio de conservação de energia para o caso considerado aqui.

Portanto, a grandeza $\xi = \frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ desempenha o papel do momento linear de um ponto material e, de acordo com as Eqs. (11), temos

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x$$

como na mecânica clássica. A possibilidade de introduzir um momento linear do ponto material é baseada no fato de que nas equações de movimento a força, isto é, o segundo termo da Eq. (15), pode ser representada como uma derivada temporal.

Além disso, vemos imediatamente que nossas equações de movimento para o ponto material podem ser colocados na forma de equações lagrangianas de movimento; pois, de acordo com as Eqs. (11), temos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right] = K_x,$$

etc. na qual colocamos

$$H = -\mu c^2\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} + \text{const.}$$

As equações de movimento também podem ser representadas de acordo com o princípio de Hamilton

$$\int_{t_0}^{t_1} (dH + A)dt = 0,$$

na qual t e as posições inicial e final são invariantes e A representa o trabalho virtual

$$A = K_x\partial x + K_y\partial y + K_z\partial z.$$

Finalmente estabeleceremos ainda as equações de movimento canônicas de Hamilton. Isso é feito ao introduzirmos as "coordenadas de momento" (componentes do momento linear) ξ, η, ζ, definindo, como feito acima,

$$\xi = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\ , \text{ etc.}$$

Se considerarmos a energia cinética L como função de ξ, η, ζ, e definir $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2$, obteremos

$$L = \mu c^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\mu^2c^2}} + \text{const.},$$

e as equações de movimento de Hamilton passam a ser

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \xi} \qquad \frac{d\eta}{dt} = K_y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \eta} \qquad \frac{d\zeta}{dt} = K_z \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \zeta}.$$

§10. Sobre a possibilidade de um teste experimental da teoria de movimento do ponto material. A investigação de Kaufmann

Uma perspectiva de comparação com experiências dos resultados derivados na última seção existe somente no caso em que os pontos materiais carregados eletricamente movem-se com velocidades cujos quadrados não são desprezíveis em relação a c^2. Essa condição é satisfeita no caso de raios catódicos mais rápidos e raios de elétrons (radiação β) emitido por substâncias radioativas.

Existem três grandezas características de feixes (raios) de elétrons cujas relações mútuas podem ser objeto de investigação experimental mais detalhada, a saber: o potencial gerador ou a energia cinética do feixe, a capacidade de ser defletido por um campo elétrico ou por um campo magnético.

De acordo com a Eq. (14), o potencial gerador Π é dado pela fórmula

$$\Pi\varepsilon = \mu\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}-1\right\}c^2.$$

Para calcular as duas outras grandezas, usamos a última das Eqs. (11) para o caso em que o movimento é momentaneamente paralelo ao eixo X. Designando por ε o valor absoluto da carga do elétron, obtemos

$$-\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu}\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\left[Z+\frac{q}{m}M\right].$$

Se as únicas componentes do campo defletor são Z e Me, portanto, o desvio se dá no plano XZ, o raio de curvatura R da trajetória é dado por $\frac{q^2}{R}=\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]$. Assim, definindo a capacidade de deflexão dos campos elétrico e magnético como $A_e = \frac{1}{R} : Z$ e $A_m = \frac{1}{R} : M$, respectivamente, para o caso em que apenas uma componente do campo elétrico defletor ou apenas uma componente do campo magnético defletor está presente, temos

$$A_e = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}{q^2}$$

$$A_m = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}{cq}.$$

No caso dos raios catódicos as três grandezas Π, A_e e A_m são possíveis candidatos para medições; no entanto, nenhuma investigação com raios catódicos suficientemente velozes foi até agora realizada. No caso da radiação β, apenas as grandezas A_e e A_m são (na prática) acessíveis à observação. O senhor W. Kaufmann inferiu a relação entre A_e e A_m para radiação β emitida por grãos de brometo de rádio com notável cuidado [13]. Ambas as figuras foram tiradas desse artigo.

Seu aparelho, cujas partes principais estão esboçadas em tamanho real na Fig. 1, consiste essencialmente de uma cápsula de bronze a prova de luz, *H*, colocada em um recipiente de vidro evacuado, com um grão de rádio colocado numa pequena roda, O, no fundo *A* da cápsula. Os raios β que emanam do rádio passam através da lacuna entre as placas de capacitor, P_1 e P_2, atravessam o diafragma D, cujo diâmetro é de 0,2 mm, colidindo depois em uma placa fotográfica. Os raios são defletidos, tanto pelo campo elétrico formado entre as placas do capacitor, quanto por um campo magnético na mesma direção (produzido por um grande magneto permanente), que deflete perpendicularmente a essa direção. Assim os raios com a mesma velocidade marcam um ponto na placa, enquanto que um aglomerado de partículas com velocidades diferentes marcam uma curva na mesma placa.

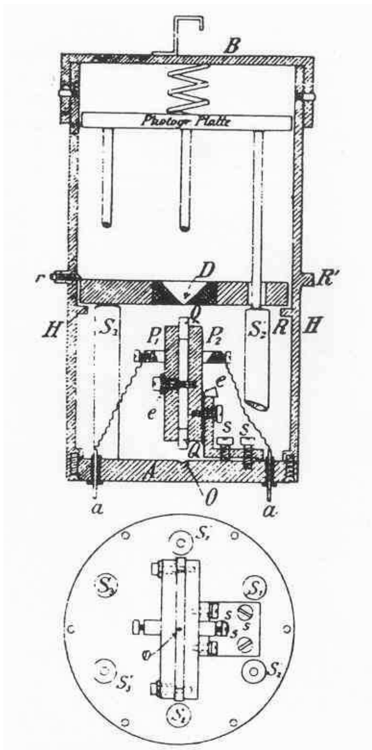

Figura 1 -

A Fig. 2 mostra essa curva[19] que na escala para a abscissa e a ordenada, representa a razão entre A_m(abscissa) e A_e (ordenada). As pequenas cruzes acima da curva calculadas de acordo com a teoria da relatividade, se o valor de ε/μ for tomado como $1,878 \times 10^7$.

[19]As unidades dadas no gráfico representam milímetros na placa fotográfica. A curva desenhada não é exatamente a curva observada, ma a curva "reduzida a deflexões infinitesimalmente pequenas"

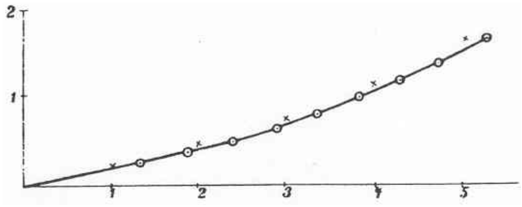

Figura 2 -

Em vista das dificuldades envolvidas no experimento inclinamo-nos a considerar esse acordo como satisfatório. No entanto, os desvios são sistemáticos e consideravelmente além do limite do erro do experimento de Kaufmann. Que os cálculos do senhor Kaufmann são livres de erros é demonstrado pelo fato de que o senhor Planck, baseado em outro método de cálculo, chegou a resultados que estão em perfeito acordo com os do senhor Kaufmann [14].

Apenas com disponibilidade de um corpo de observações mais amplo será possível decidir com confiança se esses desvios sistemáticos são devidos a uma fonte de erros ainda não identificada no experimento, ou devido à circunstância que os fundamentos da teoria da relatividade não correspondem aos fatos.

Deve ser mencionado também, que as teorias de Abraham [15] e de Bucherer [16], para o movimento do elétron, levam a curvas que estão significativamente mais próximas à curva experimental, que à curva obtida da teoria da relatividade. No entanto, a probabilidade de que essas teorias estejam corretas é, na verdade, pequena, na minha opinião, porque suas hipóteses básicas, relacionadas à dimensão do elétron em movimento, não são sugeridas por sistemas teóricos que dêem conta de conjuntos mais amplos de fenômenos.

V - Sobre a mecânica e a termodinâmica dos sistemas

§11. Sobre a dependência da massa em relação à energia

Consideraremos um sistema físico encapsulado por um invólucro impenetrável à radiação. Suponha que o sistema flutue livremente no espaço e não esteja sujeito a nenhuma força, exceto aos efeitos das forças elétricas e magnéticas do espaço circundante. Através desse último, energia pode ser transferida ao sistema na forma de trabalho e calor. Essa energia pode sofrer conversões de algum tipo no interior do sistema. A energia absorvida pelo sistema, de acordo com a Eq. (13), é dada pela seguinte expressão, quando relativa ao sistema referencial S,

$$\int dE = \int dt \int \frac{\rho}{4\pi} \left(X_\alpha u_x + Y_\alpha u_y + Z_\alpha u_z\right) d\omega,$$

na qual $(X_a,\, Y_a,\, Z_a)$ é o vetor de campo do campo externo (que não é incluído ao sistema) e $\frac{\rho}{4\pi}$ é a densidade de carga encapsulada. Transformamos essa expressão com a inversão das Eqs. (7a), (8), e (9), levando em conta que, de acordo com as Eqs. (1), o determinante funcional

$$\frac{D(x',y',z',t')}{D(x,y,z,t)}$$

é igual a um. Com isso obtemos que

$$\int dE = \beta \iint \frac{\rho'}{4\pi} \left(u'_x X'_a + u'_y Y'_a + u'_z Z'_a\right) d\omega' dt' +$$

$$\beta v \iint \frac{\rho'}{4\pi} (X'_a + \frac{u'_y}{c} N'_a - \frac{u'_z}{c} M'_a) d\omega' dt',$$

ou, já que o princípio da conservação de energia é válido no sistema S' também, em uma notação simplificada

$$dE = \beta dE' + \beta v \int \left[\sum K'_x\right] dt'. \qquad (16)$$

Vamos agora aplicar essa equação ao caso em que o sistema considerado move-se uniformemente, de tal forma, que como um todo esteja em repouso em relação a S'. Então, desde que as partes do sistema se movem tão lentamente em relação a S', que os quadrados das velocidades sejam desprezíveis em relação a c^2, podemos aplicar os princípios da mecânica newtoniana em relação a S'. Portanto, de acordo com o teorema do centro de massa, o sistema considerado (ou, mais precisamente, seu centro de massa) pode permanecer em repouso permanentemente apenas se para cada t'

$$\sum K'_x = 0.$$

Mesmo assim, o segundo termo do lado direito da Eq. (16) não desaparece necessariamente, pois a integração sobre o tempo é feita entre dois valores específicos de t e não de t'.

Se considerarmos, no entanto, que no início e no final do intervalo de tempo considerado nenhuma força age sobre o sistema de corpos, então esse termo se anula e obtemos simplesmente

$$dE = \beta \cdot dE'.$$

Em primeiro lugar concluímos dessa equação que a energia de um sistema em movimento (uniforme), que não é afetado por forças externas, é uma função de duas variáveis, a saber: a energia E_0 do sistema relativa ao sistema referencial movendo-se junto a ele[20] e a velocidade de translação q do sistema. Assim obtemos

[20]Aqui, como no que seguirá, usamos um símbolo como o índice "0" para indicar que a quantidade em questão se refere a um sistema de referência que está em repouso em relação ao sistema físico considerado. Como o sistema físico considerado está em repouso em relação a S', podemos substituir E' por E_0 aqui.

$$\frac{\partial E}{\partial E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

Disso segue que

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} E_0 + \varphi(q),$$

na qual $\phi(v)$ é uma função de q desconhecida por agora. O caso no qual E_0 é igual a zero, ou seja, que a energia do sistema em movimento é somente função da velocidade q, já foi examinado em §8 e §9. Da Eq. (14) segue imediatamente que devemos colocar

$$\varphi(v) = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \text{const.}$$

e com isso obtemos

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2}\right) \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}, \tag{16a}$$

na qual a constante de integração foi omitida. Uma comparação dessa expressão para E com a expressão para a energia cinética de um ponto material na Eq. (14) mostra que as duas expressões apresentam a mesma forma: no que se refere à dependência da energia em relação à velocidade de translação, o sistema físico sob consideração comporta-se como um ponto material de massa M, onde M depende do conteúdo de energia E_0 do sistema, de acordo com a fórmula

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}. \tag{17}$$

Esse resultado é de importância extraordinária, do ponto de vista teórico, pois a massa inercial e a energia do sistema físico aparecem nele como objetos do mesmo tipo. Em relação à inércia, uma massa μ é equivalente a uma quantidade de energia de magnitude μc^2. Já que podemos atribuir arbitrariamente a origem de energia para E_0, não estamos em condições de nem ao menos distinguir entre a massa "real" e a massa "aparente" do sistema sem arbitrariedades. Parece muito mais natural considerar qualquer massa inercial como uma reserva de energia.

De acordo com o nosso resultado, a lei de conservação da massa aplica-se a um dado sistema físico apenas no caso em que sua energia permanece constante. Nesse caso a conservação da massa é equivalente ao princípio de conservação de energia. Certamente as mudanças experimentadas pelas massas dos sistemas físicos durante processos físicos familiares são imensuravelmente pequenas. Por exemplo, a diminuição de massa de um sistema que libera 1 kcal é de apenas $4,6 \times 10^{-11}$ grama.

O decaimento radioativo de uma substância é acompanhado pela emissão de enormes quantidades de energia. Será que a redução de massa em tais processos não seria grande o suficiente para ser detectada?

O senhor Planck escreveu o seguinte a respeito disso: "De acordo com J. Precht [17], 1 átomo-grama de rádio cercado por uma camada suficientemente espessa de chumbo, libera 134,4 × 225 = 30.240 gramas calorias por hora. De acordo com (17) isso implica em uma diminuição da massa de

$$\frac{30240 \cdot 419 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{20}} \text{ g} = 1,41 \times 10^{-6} \text{ mg}$$

por hora ou 0,012 mg por ano. Essa quantidade é obviamente ainda muito pequena, especialmente em vista do elevado peso atômico do rádio, que deve estar ainda fora do intervalo experimental acessível hoje em dia." A questão óbvia que se impõe é se seria possível alcançar esse objetivo por meio de métodos indiretos. Se M é o peso atômico de um átomo que está se desintegrando e m_1, m_2, etc., são os pesos atômicos dos produtos finais da desintegração radioativa, então temos que ter

$$M - \sum m = \frac{E}{c^2},$$

na qual E significa a energia produzida durante a desintegração de um átomo grama. Isso pode ser calculado se a energia liberada por unidade de tempo durante a desintegração estacionária e a constante de desintegração média do átomo forem conhecidas. Se o método pode ser aplicado com sucesso depende principalmente da existência de reações radioativas para as quais $\frac{M-\sum m}{M}$ não é muito pequena comparada a 1. No exemplo do rádio mencionado acima obtém-se – se o tempo de vida médio for tomado como 2600 anos – aproximadamente

$$\frac{M - \sum m}{M} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2600}{250} = 0,00012.$$

Portanto, se o tempo de vida do rádio foi estimado com razoável precisão, poderíamos checar nossas relações se conhecêssemos os pesos atômicos envolvidos com uma precisão de cinco casas. Isso, obviamente, é impossível. No entanto, é possível que processos radioativos ainda sejam detectados, para os quais uma porcentagem significativamente mais alta da massa do átomo original seja convertida em energia de uma variedade de radiações do que no caso do rádio. Ao menos parece razoável imaginar que a energia produzida durante a desintegração de um átomo varie, de substância para substância, ao menos tanto quanto a constante de decaimento[21].

Está tacitamente implícito na discussão acima, que essa mudança na massa poderia ser medida por um instrumento que usualmente utilizamos para medir massas, ou seja, uma balança e, portanto, a relação

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}$$

seria válida, não somente para a massa inercial, mas também para a massa gravitacional, ou, em outras palavras, a inércia de um sistema e o peso são estritamente proporcionais sob todas as circunstâncias. Nós teríamos que assumir também, por exemplo, que a radiação contida em uma cavidade possui não apenas inércia, mas também peso. Essa proporcionalidade entre a massa inercial e a gravitacional é válida, no entanto, sem exceção para todos os corpos com a precisão possível até agora, de modo que devemos assumir sua validade geral até prova em contrário. Iremos encontrar um novo argumento em favor dessa suposição na última secção desse artigo.

§12. Energia e momento de um sistema em movimento

Como na secção anterior, iremos uma vez mais considerar um sistema que flutua livremente no espaço e está encapsulado por uma película impermeável à radiação. Novamente iremos designar os campos eletromagnéticos externos, que intermedeiam as trocas de energia com outros sistemas, por X_a, Y_a, Z_a, etc. Podemos aplicar a esse campo externo o mesmo raciocínio que nos levou à fórmula (15) e assim obter

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}\left(Y_a N_a - Z_a M_a\right) d\omega\right] + \int \frac{\rho}{4\pi}\left[X_a + \frac{u_y}{c}N_a - \frac{u_z}{c}M_a\right] d\omega = 0.$$

Assumiremos agora que o princípio de conservação do momento é universalmente válido. Nesse caso deve ser possível representar a parte do segundo termo da equação acima, que se estende sobre a região de encapsulamento do sistema, como uma derivada temporal de uma grandeza G_x, que é completamente determinada pelo estado instantâneo do sistema e que nomearemos como a componente x do momento do sistema. Desejamos agora encontrar a lei de transformação da grandeza G_x. Aplicando as equações de transformação (1), (7), (8) e (9), obtemos, exatamente do mesmo modo como na seção anterior, a relação

$$\int dG_x = \beta \iint \frac{\rho'}{4\pi}\left[X'_a + \frac{u'_y}{c}N'_a - \frac{u'_z}{c}M'_a\right] d\omega' \cdot dt' + \frac{\beta v}{c^2}\iint \frac{\rho'}{4\pi}\left[X'_a u'_x + Y'_a u'_y + Z'_a u'_z\right] d\omega' \cdot dt$$

ou

$$dG_x = \beta\frac{v}{c^2}dE' + \beta\int\left\{\sum K'_x\right\}dt'. \qquad (18)$$

Novamente, deixemos o corpo mover-se sem aceleração, de modo que se encontre permanentemente em repouso em relação a S'. Temos, novamente, que

$$\sum K'_x = 0.$$

Embora os limites de integração temporal dependam de x', o segundo termo do lado direito da equação acima desaparece no caso do corpo não estar sujeito a forças externas, antes e após a mudança em questão. Teremos então

$$dG_x = \beta\frac{v}{c^2}dE'.$$

Dessa relação segue que o momento de um sistema não exposto a forças externas é função apenas de duas variáveis, a saber: a energia E_0 do sistema relativamente ao referencial movendo-se junto a ele e a velocidade de translação q desse último. Assim

$$\frac{\partial G}{\partial E_0} = \frac{\frac{q}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

Isso implica que

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\cdot\left[\frac{E_0}{c^2} + \psi(q)\right],$$

na qual $\psi(q)$ é uma função de q ainda desconhecida. Como $\psi(q)$ é, de fato, o momento se esse for determinado apenas pela velocidade, concluímos da fórmula (15b) que

$$\psi(q) = \frac{\mu q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

Obtemos assim

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\left\{\mu + \frac{E_0}{c^2}\right\}. \qquad (18a)$$

[21] A primeira verificação experimental documentada da relação massa-energia em reações nucleares é de 1932. (N.T.)

A única diferença entre essa expressão e a expressão para o momento de um ponto material é que μ foi substituída por $\left[\mu + \frac{E_0}{c^2}\right]$, de acordo com o resultado da seção prévia.

Vamos agora determinar a energia e o momento de um corpo em repouso relativo à S, no caso desse corpo estar sujeito a forças externas permanentes. Mesmo que nesse caso também seja válido que

$$\sum K'_x = 0,$$

para cada instante t', a integral

$$\int \left[\sum K'_x\right] dt'$$

que aparece nas Eqs. (16) e (18) não se anula, porque precisa ser estendida a dois valores definidos de t e não de t'. Como a inversão da primeira das Eqs. (1) fornece

$$t = \beta\left[t' + \frac{v}{c^2}x'\right],$$

os limites de integração sobre t' serão dados por

$$\frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{c^2}x' \quad \text{e} \quad \frac{t_2}{\beta} - \frac{v}{c^2}x',$$

na qual t_1 e t_2 são independentes de x', y', z'. Assim os limites de integração para a integração temporal em relação a S' dependem da posição dos pontos de aplicação das forças. Dividiremos a integral acima em três integrais:

$$\int \left[\sum K'_x\right] dt' = \int_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{vx'}{c^2}}^{\frac{t_1}{\beta}} + \int_{\frac{t_1}{\beta}}^{\frac{t_2}{\beta}} + \int_{\frac{t_2}{\beta}}^{\frac{t_2}{\beta} - \frac{vx'}{c^2}}.$$

A segunda dessas integrais se anula porque tem como limites instantes de tempo constantes. Se, além disso, as forças K'_x variam de modo arbitrariamente rápido, as outras duas integrais não podem ser calculadas, de modo que não se pode falar, em hipótese alguma, da energia ou momento do sistema ao aplicar os princípios usados aqui [18]. No entanto, se essas forças variarem pouco durante os intervalos de tempo da ordem de $\frac{vx'}{c^2}$, podemos definir

$$\int_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{vx'}{c^2}}^{\frac{t_1}{\beta}} (\sum K'_x) dt' = \sum K'_x \int_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{vx'}{c^2}}^{\frac{t_1}{\beta}} dt' = \frac{v}{c^2} \sum x' K'_x.$$

Após manipulação similar da terceira integral obtemos

$$\int \left(\sum K'_x\right) dt' = -d\left\{\frac{v}{c^2} \sum x' K'_x\right\}.$$

Agora a energia e o momento podem ser calculados das Eqs. (16) e (18) sem dificuldades:

$$E = \left[\mu + \frac{E_0}{c^2}\right] \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} - \frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \sum (\delta_0 K_{0\delta}) \quad (16b)$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left[\mu + \frac{E_0 - \sum (\delta_0 K_{0\delta})}{c^2}\right], \quad (18b)$$

na qual $K_{0\delta}$ representa a componente na direção do movimento de uma força medida em um sistema referencial movendo-se junto ao corpo e δ_0 representa a distância, medida nesse mesmo sistema, entre o ponto de aplicação da força e um plano perpendicular à direção de movimento.

No caso de que a força externa consista de uma pressão p_0, como assumiremos daqui em diante, que independe da direção e age sempre perpendicularmente à superfície do sistema, teremos o caso especial

$$\sum (\delta_0 K_{0\delta}) = -p_0 V_0, \quad (19)$$

na qual V_0 é o volume de um sistema averiguado em um sistema referencial que se move juntamente com aquele. Eqs. (16b) e (18b) tomam então a forma

$$E = \left[\mu + \frac{E_0}{c^2}\right] \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} p_0 V_0 \quad (16c)$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left[\mu + \frac{E_0 + p_0 V_0}{c^2}\right]. \quad (18c)$$

§13. O volume e a pressão de um sistema em movimento. Equações de movimento

Para determinar o estado do sistema considerado usamos as grandezas E_0, p_0, V_0, que são definidas em relação ao sistema referencial que se move junto com o sistema físico. Podemos, no entanto, ao invés de usar essas grandezas, utilizar as grandezas correspondentes que são definidas com respeito ao mesmo sistema referencial do momento G. Para fazer isso precisamos examinar como o volume e a pressão se modificam com a introdução desse novo sistema referencial.

Considere um corpo em repouso com relação ao sistema referencial S'. Considere V' como sendo o volume desse corpo em relação ao mesmo referencial S' e V seu volume com relação a S. Segue imediatamente das Eqs. (2) que

$$\int dx \cdot dy \cdot dz = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

ou

$$V = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot V'. \tag{20}$$

Para obter as equações de transformação para as forças que exercem pressão, precisamos partir das equações de transformação que se aplicam às forças em geral. Como definimos as forças em movimento em §8 de tal modo que elas podem ser substituídas por forças de campos eletromagnéticos sobre cargas elétricas, podemos restringir-nos a determinar as equações de transformação dessas últimas[22].

Consideremos a carga elétrica ε em repouso em relação a S'. De acordo com as Eqs. (12), a força agindo sobre ela é dada pelas equações

$$K_x = \varepsilon X \qquad K'_x = \varepsilon X'$$

$$K_y = \varepsilon \left[Y - \frac{v}{c} N \right] \qquad K'_y = \varepsilon Y'$$

$$K_z = \varepsilon \left[Z + \frac{v}{c} M \right] \qquad K'_z = \varepsilon Z'.$$

Dessas equações e as relações (7a) segue que

$$\begin{aligned} K'_x &= K_x \\ K'_y &= \beta \cdot K_y \\ K'_z &= \beta \cdot K_z \end{aligned} \tag{21}$$

Essas equações permitem calcular as forças quando elas são conhecidas em relação ao sistema referencial que se move junto ao sistema físico considerado.

Agora consideramos a força de pressão agindo sobre um elemento de superfície s', que está em repouso relativo a S':

$$\begin{aligned} K'_x &= p's' \cdot \cos l' = p' \cdot s'_x \\ K'_y &= p's' \cdot \cos m' = p' \cdot s'_y \\ K'_z &= p's' \cdot \cos n' = p' \cdot s'_z, \end{aligned}$$

na qual l', m', n' representam os cossenos da direção normal (com sentido para o interior do corpo) e s'_x, s'_y, s'_z são as projeções de s'. Das Eqs. (2) temos que

$$\begin{aligned} s'_x &= s_x \\ s'_y &= \beta \cdot s_y \\ s'_z &= \beta \cdot s_z, \end{aligned}$$

na qual s_x, s_y, s_z são projeções do elemento de superfície com relação a S. Para as componentes K_x, K_y, K_z, das forças de pressão com relação a S, obtemos a partir dos três últimos sistemas de equações

$$\begin{aligned} K_x &= K'_x = p's'_x = p' \cdot s_x = p' \cdot s \cos l \\ K_y &= \frac{1}{\beta} K'_y = \frac{1}{\beta} p's'_y = p' \cdot s_y = p' \cdot s \cdot \cos m \\ K_z &= \frac{1}{\beta} K'_z = \frac{1}{\beta} p's'_z = p' \cdot s_z = p' \cdot s \cdot \cos n, \end{aligned}$$

na qual s é a magnitude do elemento de superfície e l, m, n são os cossenos de sua direção normal com respeito a S. Assim obtivemos o resultado de que a pressão p' com relação ao referencial que se move junto com o corpo pode ser substituído, com respeito a outro sistema referencial, por uma outra pressão de mesma magnitude e que também é perpendicular ao elemento de superfície. Na nossa notação temos então

$$p = p_0. \tag{22}$$

As Eqs. (16c), (20) e (22) permitem que determinemos o estado de um sistema físico usando as grandezas E, V, p, que são definidas em relação ao mesmo sistema do momento G e a velocidade q, ao invés de usar E_0, V_0, p_0 que se referem ao sistema referencial que se move junto ao sistema físico. Por exemplo, se para um observador que se move junto com o sistema, o estado do sistema considerado está completamente determinado por duas variáveis (E_0 e V_0), ou seja, se as equações de estado do sistema podem ser consideradas como relações entre p_0, V_0 e E_0, então, com a ajuda das equações mencionadas acima, a equação de estado pode ser colocada na forma

$$\varphi(q, p, V, E) = 0.$$

Analogamente, a Eq. (18c) pode ser colocada na forma

$$G = q \left[\frac{E + pV}{c^2} \right], \tag{18d}$$

que, combinada com as equações que expressam o princípio de conservação do momento

$$\frac{dG_x}{dt} = \sum K_x, \text{ etc.,}$$

[22]Essa circunstância também justifica o procedimento usado na investigação precedente, na qual introduzimos apenas interações de *natureza puramente eletromagnética* entre o sistema considerado e suas vizinhanças. Os resultados são válidos em geral.

determina completamente o movimento translacional do sistema como um todo, se, além das grandezas $\sum K_x$, etc., conhecemos E, V, p como função do tempo; ou ainda, se ao invés dessas três funções, se conhecemos três dados equivalentes relacionados às condições sob as quais o movimento do sistema se realiza.

§14. Exemplos

O sistema a ser considerado consiste de radiação eletromagnética, que está limitada por um corpo oco sem massa, cujas paredes equilibram a pressão de radiação. Se nenhuma força externa age sobre o corpo oco, aplicamos as Eqs. (16a) e (18a) ao sistema como um todo (incluindo o corpo oco). Teremos assim:

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \\ G &= \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\frac{E_0}{c^2} = q\frac{E}{c^2}, \end{aligned}$$

na qual E_0 é a energia da radiação em relação ao sistema referencial que se move junto com o sistema físico em consideração.

No entanto, se as paredes do corpo oco são completamente flexíveis e extensíveis, de modo que a pressão de radiação exercida do interior tem que ser equilibrada por forças externas exercidas por corpos não pertencentes ao sistema considerado, é necessário aplicar as Eqs. (16c) e (18c) e inserir o resultado do valor de pressão de radiação bem conhecido

$$p_0 = \frac{1}{3}\frac{E_0}{V_0},$$

obtemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0\left[1+\frac{1}{3}\frac{q^2}{c^2}\right]}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \\ G &= \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\frac{\frac{4}{3}E_0}{c^2}. \end{aligned}$$

A seguir vamos considerar o caso de um corpo sem massa eletricamente carregado. Se forças externas não agem sobre o corpo, podemos novamente aplicar as fórmulas (16a) e (18a). Designando por E_0 a energia elétrica relativa ao sistema de referência que se move junto ao sistema físico considerado, teremos

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \\ G &= \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\frac{E_0}{c^2}. \end{aligned}$$

Uma parte desses valores deve ser alocada ao campo eletromagnético e o resto ao corpo sem massa, que está sujeito a forças devidas à sua carga [19].

§15. A entropia e a temperatura de corpos em movimento

Das variáveis que determinam o estado de um sistema, utilizamos até agora a pressão, volume, energia, velocidade e momento, mas não foram discutidas ainda grandezas térmicas. A razão para isso é que para o *movimento* de um sistema é irrelevante que tipo de energia é fornecido, de modo que não há motivo para distinguir entre calor e trabalho mecânico. Agora, no entanto, queremos introduzir também grandezas térmicas.

Consideremos que o estado de um sistema em movimento seja completamente determinado pelas quantidades q, V e E. Obviamente, nesse caso temos que considerar que o calor fornecido, dQ, seja igual ao aumento de energia total menos o trabalho produzido pela pressão e que é usado no aumento do momento, de modo que[23]

$$dQ = dE + pdV - qdG. \tag{23}$$

Após definirmos dessa forma o calor fornecido a um sistema em movimento, podemos introduzir uma temperatura absoluta T e a entropia η do sistema em movimento considerando processos cíclicos reversíveis do mesmo modo como nos livros-texto de termodinâmica. Para processos reversíveis, a equação

$$dQ = Td\eta \tag{24}$$

também é válida no presente contexto.

O próximo passo é derivar as equações relacionando as grandezas dQ, η, T e as grandezas correspondentes dQ_0, η_0, T_0, que se referem ao sistema de referência que se movimenta junto com o sistema físico considerado. No que se refere à entropia, estarei repetindo a argumentação do senhor Planck [20], chamando a atenção ao fato de que os sistemas de referência "linha" e "sem linha" devem ser entendidos como os sistemas referenciais S' e S.

"Imaginemos que um corpo é levado, por meio de um processo reversível e adiabático, de um estado, no qual esteja em repouso em relação ao sistema referencial "sem linha", para um segundo estado, no qual ele se encontra em repouso em relação ao sistema referencial "linha". Se a entropia do corpo para o sistema "sem linha" no estado inicial é η_1 e no estado final é

[23] Essa equação, como várias outras, apresenta um erro tipográfico no original, que está corrigido nessa tradução. No presente caso aparece qdQ em vez de qdG no original (N.T.)

η_2, então, por causa da reversibilidade e da natureza adiabática do processo, $\eta_1 = \eta_2$. O processo é igualmente reversível e adiabático para o sistema referencial "linha", portanto temos também que $\eta_1' = \eta_2'$."

"Agora, se η_1' não for igual a η_1, mas, digamos, $\eta_1' > \eta_1$, isso significaria que: a entropia de um corpo é maior para um sistema referencial em relação ao qual o corpo está em movimento, do que para o sistema referencial em relação ao qual se encontra parado. Essa proposição, no entanto, requer também que $\eta_2' > \eta_2$, pois no último estado o corpo está em repouso no referencial "linha" e em movimento no referencial "sem linha". Nota-se que essas duas desigualdades estão em conflito com as duas igualdades estabelecidas. Do mesmo modo não se pode ter $\eta_1' > \eta_1$ e, conseqüentemente, $\eta_1' = \eta_1$ e, em geral, $\eta' = \eta$, ou seja, a entropia do corpo não depende da escolha do sistema referencial".

Usando nossa notação, temos que estabelecer que

$$\eta = \eta_0. \tag{25}$$

Se agora introduzirmos as grandezas p_0, V_0 e E_0 no lado direito da Eq. (23), usando as Eqs. (16c), (18c), (20) e (22), obtemos

$$dQ = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\,(dE_0 + p_0 dV_0)$$

ou

$$dQ = dQ_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}. \tag{26}$$

Além disso, como de acordo com (24) as equações

$$dQ = T d\eta$$
$$dQ_0 = T_0 d\eta$$

são válidas, obtemos finalmente, levando em conta (25) e (26), que[24]

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \tag{27}$$

Portanto, a temperatura de um sistema em movimento é sempre menor em relação a um sistema referencial que se move relativamente a ele, do que em relação a um sistema referencial em repouso em relação ao mesmo sistema físico.

§16. A dinâmica dos sistemas e o princípio de mínima ação

No seu tratado "Sobre a dinâmica dos corpos em movimento", o senhor Planck começa a partir do princípio de mínima ação (bem como das equações de transformação para a pressão e temperatura da radiação de corpo negro)[20] e chega a resultados que são idênticos aos discutidos aqui. Surge, portanto, a questão de como os fundamentos de seu estudo se relacionam com os do presente trabalho.

Partimos do princípio de conservação de energia e do princípio de conservação do momento. Se as componentes da resultante das forças agindo sobre o sistema são chamadas F_x, F_y, F_z, podemos formular da seguinte maneira os princípios que usamos para processos reversíveis e um sistema cujo estado é definido pelas variáveis q, V, T:

$$dE = F_x dx + F_y dy + F_z dz - p dV + T d\eta \tag{28}$$

$$F_x = \frac{dG_x}{dt}, \text{ etc.} \tag{29}$$

Tendo em mente que

$$F_x dx = F_x \dot{x} dt = \dot{x} dG_x = d(\dot{x} G_x) - G_x d\dot{x}, etc$$

e que

$$T d\eta = d(T\eta) - \eta dT,$$

obtemos das equações acima a seguinte relação

$$d(-E + T\eta + qG) = G_x d\dot{x} + G_y d\dot{y} + G_z d\dot{z} + p dV + \eta dT.$$

Dado que o lado direito dessa equação também tem que ser um diferencial total e levando em conta (29), segue que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right] = F_x \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right] = F_y \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right] = F_z$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = p \qquad \frac{\partial H}{\partial T} = \eta.$$

Essas são, no entanto, as equações deriváveis a partir do princípio da mínima ação, que o senhor Planck utilizou como ponto de partida.

[24] Muitos anos depois, Einstein retoma o problema e chega a um resultado diferente: $\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$ (N.T.).

V. Princípio da relatividade e gravitação

§17. Sistema referencial acelerado e campo gravitacional

Até agora aplicamos o princípio da relatividade, ou seja, a suposição de que as leis físicas são independentes do estado de movimento do sistema referencial, apenas para sistemas referenciais *não acelerados*. É concebível que o princípio da relatividade também se aplica a sistemas que estão acelerados relativamente entre si?

Embora esse não seja o foro para uma discussão detalhada dessa questão, essa terá ocorrido a qualquer um que tenha acompanhado as aplicações do princípio da relatividade. Por isso eu não vou me abster de tomar uma posição sobre o problema.

Vamos considerar dois sistemas de movimento, Σ_1 e Σ_2. Seja Σ_1 acelerado na direção do seu eixo X e seja γ a magnitude (temporariamente constante) da aceleração. Σ_2 encontra-se em repouso, mas localizado em um campo gravitacional homogêneo que provoca uma aceleração $-\gamma$ a todos os objetos na direção do eixo X.

Até onde se sabe, as leis físicas em relação a Σ_1 não diferem daquelas em relação a Σ_2. Isso baseia-se no fato de que todos os corpos estão igualmente acelerados no campo gravitacional. Pelo presente estado de conhecimento e experiência, não temos razões para supor que Σ_1 e Σ_2 difiram um do outro em qualquer aspecto e na discussão que se segue assumiremos, portanto, uma equivalência física completa entre um campo gravitacional e uma aceleração correspondente de um sistema referencial.

Essa suposição estende o princípio da relatividade ao movimento de translação uniformemente acelerado de um sistema referencial. O valor heurístico dessa suposição repousa no fato de que ela permite substituir um campo gravitacional homogêneo por um sistema referencial uniformemente acelerado, sendo esse último caso acessível, em certa extensão, a um tratamento teórico.

§18. Espaço e tempo em um sistema referencial uniformemente acelerado

Inicialmente consideraremos um corpo, cujos pontos materiais individuais, em um dado instante t de um sistema referencial S não acelerado, não têm velocidade em relação a S, mas uma certa aceleração. Qual é a influência da aceleração γ na forma do corpo em relação a S?

Se essa influência estiver presente, consistirá de uma dilatação, com razão constante, na direção da aceleração e, possivelmente, nas duas direções perpendiculares a ela, pois efeitos de outro tipo são impossíveis por razões de simetria. As dilatações causadas pela aceleração (se existem de fato) têm que ser funções pares de γ; portanto podem ser desprezadas se nos restringirmos aos casos para os quais γ é tão pequeno que termos de segunda ordem (e superiores) de γ podem ser desprezados. Já que vamos nos restringir a essas situações, não precisamos assumir que a aceleração tem alguma influência sobre a forma do corpo.

Consideraremos agora um sistema referencial Σ que está uniformemente acelerado em relação ao sistema S não acelerado na direção do eixo X desse último. Os relógios e réguas de medida de Σ, quando examinados em repouso, devem ser idênticos aos relógios e réguas de S. A origem do sistema de coordenadas de Σ deve mover-se ao longo do eixo X de S e os eixos de Σ devem ser perpetuamente paralelos aos eixos de S. A qualquer momento existirá um sistema referencial não acelerado S' cujos eixos coordenados coincidirão com os eixos de Σ no momento em questão (a um dado instante t' de S'). Se as coordenadas de um evento pontual ocorrendo no instante t' são ξ, η, ζ com relação a Σ, teremos

$$\begin{aligned} x' &= \xi \\ y' &= \eta \\ z' &= \zeta, \end{aligned}$$

porque de acordo com o dito acima, não vamos supor que a aceleração afeta a forma dos instrumentos de medida usados para medir ξ, η, ζ. Iremos imaginar também que os relógios de Σ são ajustados no instante t' de S' de tal forma que a leitura dos mesmos nesse instante será t'. Como será o passo dos relógios no próximo elemento de tempo τ?

Primeiramente temos que ter me mente que um efeito específico da *aceleração* sobre o passo dos relógios de Σ não precisam ser levados em conta, pois teriam que ser da ordem de γ^2. Além disso, como o efeito da velocidade adquirida durante τ sobre o passo dos relógios é desprezível e as distâncias viajadas pelos relógios durante τ em relação àquelas viajadas por S' também são da ordem de τ^2, ou seja, desprezíveis, então as leituras dos relógios de Σ podem ser perfeitamente substituídos pelas leituras dos relógios de S' para o elemento de tempo τ.

Do exposto acima segue que, em relação a Σ, a luz se propaga no vácuo durante o intervalo τ com a velocidade universal c se definirmos a simultaneidade no sistema S', que está momentaneamente em repouso em relação a Σ, e se os relógios e as réguas usamos para medir tempo e distância são idênticos com aqueles usados nas medidas de tempo e distância em referenciais não acelerados. Assim o princípio da constância da velocidade da luz pode ser usado na presente situação também para definir simultaneidade, se nos restringirmos a trajetórias de luz muito curtas.

Imaginemos agora que os relógios de Σ são ajustados do modo descrito no instante $t = 0$ de S em que Σ está instantaneamente em repouso em relação a S. A totalidade das leituras dos relógios de Σ ajustados desse modo é chamado de "tempo local" σ do sistema Σ. O significado físico de σ fica imediatamente evidente no argumento seguinte. Se alguém usa o tempo local σ para uma estimativa temporal de processos ocorrendo em elementos espaciais individuais de Σ, então as leis obedecidas por esses processos não podem depender da posição desses elementos espaciais, isto é, de suas coordenadas, se não apenas os relógios, mas também as réguas usadas nos diversos elementos espaciais são idênticos.

Em vista disso, não devemos nos referir simplesmente ao tempo σ como o "tempo" de Σ, porque de acordo como a definição dada acima, dois eventos pontuais ocorrendo em posições diferentes de Σ não são simultâneos, quando seus tempos locais σ são iguais. Se no instante $t = 0$ dois relógios de Σ são síncronos com relação a S e são sujeitos aos mesmos movimentos, então eles permanecerão síncronos para sempre em relação a S. No entanto, por essa razão, de acordo com §4, eles não avançam sincronizados em relação ao sistema S', instantaneamente em repouso em relação a Σ, mas em movimento em relação a S e, portanto, também não avançam sincronizados em relação a Σ, de acordo com a mesma definição.

Agora definimos o "tempo" τ do sistema Σ como a totalidade das leituras do relógio situado na origem das coordenadas de Σ, que são, de acordo com a definição acima, simultâneas aos eventos que devem ser estimados temporalmente[25].

Devemos agora determinar a relação entre o tempo τ e o tempo local σ de um evento pontual. Decorre da primeira das Eqs. (1) que dois eventos são simultâneos em relação a S' e, portanto, em relação a Σ se

$$t_1 - \frac{v}{c^2}x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2}x_2,$$

na qual os índices se referem aos dois eventos pontuais. Vamos inicialmente nos ater a tempos que são tão curtos[26], que todos os termos contendo quadrados ou potências superiores de τ e v podem ser omitidos. Levando (1) e (29) em conta, podemos definir

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_2' - x_1' = \xi_2 - \xi_1 \\ t_1 &= \sigma_1 \\ t_2 &= \sigma_2 \\ v &= \gamma t = \gamma\tau, \end{aligned}$$

de modo que obtemos da equação acima

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\gamma\tau}{c^2}(\xi_2 - \xi_1).$$

Se movermos o primeiro evento pontual para a origem das coordenadas, de modo que $\sigma_1 = \tau$ e $\xi_1 = 0$, obtemos, omitindo o índice para o segundo evento pontual,

$$\sigma = \tau\left[1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right]. \qquad (30)$$

Essa equação é válida acima de tudo se ξ e τ estão abaixo de certos limites. É óbvio que é válida para τ arbitrariamente longo se a aceleração γ for constante em relação a Σ, porque a relação entre σ e τ tem que ser linear. A Eq. (30) não é válida para ξ arbitrariamente grande. Do fato de que a escolha da origem das coordenadas não deve afetar a relação, temos que concluir que, estritamente falando, a Eq. (30) deve ser substituída por

$$\sigma = \tau e^{\frac{\gamma\xi}{c^2}}.$$

Mesmo assim, manteremos a fórmula (30).

De acordo com §17, a Eq. (30) também se aplica a um sistema de coordenadas no qual age um campo gravitacional homogêneo. Nesse caso temos que definir $\Phi = \gamma\xi$, na qual Φ é o potencial gravitacional, obtendo então

$$\sigma = \tau\left[1 + \frac{\Phi}{c^2}\right] \qquad (30a).$$

Definimos dois tipos de tempo para Σ. Qual das duas definições nós temos que usar em cada caso? Vamos supor duas localidades com potenciais gravitacionais ($\gamma\xi$) diferentes com um sistema físico em cada um, cujas quantidades físicas queremos comparar. Para fazer isso, o procedimento mais natural pode ser o seguinte: primeiramente levamos nossos instrumentos de medida para o primeiro sistema físico e fazemos as medidas e, em seguida, levamos os instrumentos para o segundo sistema e lá realizamos as mesmas medidas. Se os dois conjuntos de medidas fornecem os mesmos resultados, denominaremos os dois sistemas físicos de "iguais". Os instrumentos de medida incluem um relógio com o qual medimos tempos locais σ. Disso concluímos que, para definir as grandezas físicas em uma certa posição do campo gravitacional, é natural usar o tempo σ.

No entanto, se lidarmos com um fenômeno no qual objetos situados em posições com potenciais gravitacionais diferentes têm que ser considerados simultaneamente, teremos que usar o tempo τ nos termos nos quais o tempo ocorre explicitamente (isto é, não apenas na definição de quantidades físicas), pois de outro modo a simultaneidade dos eventos não seria expressada pela igualdade dos tempos dos dois eventos. Como na definição do tempo τ foi usado um relógio situado em uma posição arbitrariamente escolhida, mas não em um instante arbitrário, quando usamos τ as leis da natureza podem variar com a posição, mas não com o tempo.

[25]Portanto o símbolo "τ" é usado aqui em um sentido diferente daquele anterior

[26]De acordo com (1) estamos supondo também uma certa restrição aos valores de $\xi = x$'.

§19. O efeito de campos gravitacionais sobre relógios

Se um relógio mostrando o tempo local está localizado em um ponto P com potencial gravitacional Φ, então, de acordo com (30a) sua leitura será $(1+\frac{\Phi}{c^2})$vezes maior do que o tempo τ, isto é, ele corre $(1+\frac{\Phi}{c^2})$vezes mais rápido do que um relógio idêntico localizado na origem das coordenadas. Imagine um observador localizado em algum lugar do espaço que percebe as indicações dos dois relógios de um certo modo, por exemplo, opticamente. O tempo $\Delta\tau$ que passa entre o instante em que o relógio indica um tempo e o instante em que essa indicação é percebida pelo observador é independente de τ. Assim, para um observador situado em algum lugar do espaço, o relógio no ponto P corre $(1+\frac{\Phi}{c^2})$vezes mais rápido que o relógio na origem do sistema de coordenadas. Nesse sentido poderíamos dizer que os processos que ocorrem no relógio e, de modo mais geral, qualquer processo físico, evolui mais rapidamente, quanto maior o potencial gravitacional na posição onde ocorre o processo.

Existem "relógios", que estão presentes em localidades com diferentes potenciais gravitacionais, com seus contadores de tempo controlados com grande precisão, que são os produtores de linhas espectrais. Pode ser concluído pelo que foi mencionado acima[27], que o comprimento de onda da luz vindo da superfície do Sol, originaria de um tal produtor (de linhas espectrais) é maior do que o da luz produzida pela mesma substância na superfície da Terra de uma parte em dois milhões[28].

§20. O efeito da gravitação sobre fenômenos eletromagnéticos

Se nos referirmos a um processo eletromagnético em um instante de tempo em relação a um sistema referencial S' não acelerado, que está momentaneamente em repouso em relação ao sistema referencial Σ, acelerado como no exposto acima, então as seguintes equações serão válidas, de acordo com (5) e (6):

$$\frac{1}{c}\left[\rho' u'_x + \frac{\partial X'}{\partial t'}\right] = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, \text{ etc.}$$

e

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} = \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'}, \text{ etc.}$$

De acordo com isso, podemos imediatamente igualar as grandezas ρ', u', X', L', x', etc., relativas à S', às correspondentes grandezas ρ, u, X, L, etc., relativas a Σ; se nos limitarmos a um período infinitesimalmente curto[29], que está infinitesimalmente perto ao instante do repouso relativo de S' e Σ. Além disso, temos que substituir t' pelo tempo local σ. No entanto, não podemos simplesmente definir

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \sigma},$$

porque um ponto que está em repouso relativo a Σ muda sua velocidade relativa a S' durante o intervalo de tempo $dt' = d\sigma$ e a essa mudança corresponde mudanças no tempo das componentes de campo relativas a Σ. Temos, então, de acordo com (7a) e (7b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X'}{\partial t'} &= \frac{\partial X}{\partial \sigma} & \frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial L}{\partial \sigma}\\
\frac{\partial Y'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c}N & \frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial M}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c}Z\\
\frac{\partial Z'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c}M & \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\gamma}{c}Y.
\end{aligned}$$

Portanto, as equações eletromagnéticas referidas a Σ são

$$\frac{1}{c}\left[\rho u_\xi + \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right] = \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1}{c}\left[\rho u_\eta + \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c}N\right] = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{c}\left[\rho u_\xi + \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c}M\right] = \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{\partial Y}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial M}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c}Z\right] = \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial N}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c}Y\right] = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

Multiplicamos essas equações por $\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]$ e definimos para fins de abreviação

$$\begin{aligned}
X^* &= X\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]\\
Y^* &= Y\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right], \text{ etc.}\\
\rho^* &= \rho\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right].
\end{aligned}$$

[27]Enquanto assumirmos que a Eq. (31) também é válida para campos gravitacionais não homogêneos.

[28]Trata-se da primeira predição de Einstein do que foi chamado depois de desvio para o vermelho gravitacional de linhas espectrais (N.T.).

[29]Essa restrição não afeta o intervalo de validade dos nossos resultados, porque as leis a serem derivadas não podem depender do tempo inerentemente.

Desprezando então termos quadráticos em γ, obtemos as equações

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\left[\rho^* u_\xi + \frac{\partial X^*}{\partial\sigma}\right] &= \frac{\partial N^*}{\partial\eta} - \frac{\partial M^*}{\partial\zeta}\\ \frac{1}{c}\left[\rho^* u_\eta + \frac{\partial Y^*}{\partial\sigma}\right] &= \frac{\partial L^*}{\partial\zeta} - \frac{\partial N^*}{\partial\xi}\\ \frac{1}{c}\left[\rho^* u_\zeta + \frac{\partial Z^*}{\partial\sigma}\right] &= \frac{\partial M^*}{\partial\xi} - \frac{\partial L^*}{\partial\eta}\end{aligned} \tag{31a}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial L^*}{\partial\sigma} &= \frac{\partial Y^*}{\partial\zeta} - \frac{\partial Z^*}{\partial\eta}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial M^*}{\partial\sigma} &= \frac{\partial Z^*}{\partial\xi} - \frac{\partial X^*}{\partial\zeta}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial N^*}{\partial\sigma} &= \frac{\partial X^*}{\partial\eta} - \frac{\partial Y^*}{\partial\xi}.\end{aligned} \tag{32a}$$

Essas equações mostram, em primeiro lugar, como o campo gravitacional afeta fenômenos estáticos e estacionários. As mesmas leis são válidas como no caso sem campo gravitacional, exceto pelo fato que as componentes de campo X, etc. são substituídas por $X\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]$, etc., e ρ por $\rho\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]$.

Além disso, para seguir o desenvolvimento de estados não estacionários, fazemos uso do tempo τ nos termos diferenciados em relação ao tempo, bem como nas definições de corrente elétrica, ou seja, colocamos de acordo com (30)

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

e

$$\omega_\xi = \left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]u_\xi$$

Obtemos então

$$\frac{1}{c\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]}\left[\rho^*\omega_\xi + \frac{\partial X}{\partial\tau}\right] = \frac{\partial N^*}{\partial\eta} - \frac{\partial M^*}{\partial\zeta}\ \text{etc.} \tag{31b}$$

e

$$\frac{1}{c\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]}\frac{\partial L^*}{\partial\tau} = \frac{\partial Y^*}{\partial\zeta} - \frac{\partial Z^*}{\partial\eta}\ \text{etc.} \tag{32b}$$

Essas equações também têm a mesma forma que as correspondentes equações para o espaço sem gravidade ou não acelerado, no entanto c é substituído por

$$c\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right] = c\left[1+\frac{\Phi}{c^2}\right].$$

Disso segue que os raios de luz que não se propagam ao longo do eixo ξ são defletidos pelo campo gravitacional. Pode ser facilmente verificado que a mudança na direção é de $\frac{\gamma}{c^2}sen\varphi$ por cm de trajetória da luz, na qual ϕ representa o ângulo entre a direção da gravidade e a do raio de luz.

Com a ajuda dessas equações e as equações relacionando a intensidade do campo e a corrente elétrica em um ponto, conhecidas da óptica dos corpos em repouso, podemos calcular os efeitos do campo gravitacional sobre fenômenos ópticos de corpos em repouso. Temos que manter em mente que, no entanto, as equações mencionadas acima para a óptica dos corpos em repouso são válidas para o tempo σ. Infelizmente o efeito do campo gravitacional terrestre é tão pequeno, de acordo com a nossa teoria (devido ao valor pequeno para $\frac{\gamma x}{c^2}$), que não há previsões para comparar essa teoria com a experiência.

Se multiplicarmos sucessivamente as Eqs. (31a) e (32a) por $\frac{X^*}{4\pi}.....\frac{N^*}{4\pi}$ e integrarmos sobre o espaço infinito, obtemos, usando a notação anterior, a seguinte relação

$$\int\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]^2\frac{\rho}{4\pi}\left(u_\xi X + u_\eta Y + u_\zeta Z\right)d\omega +$$
$$\int\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]^2\cdot\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(X^2+Y^2+...+N^2\right)dw = 0.$$

$\frac{\rho}{4\pi}\left(u_\xi X + u_\eta Y + u_\zeta Z\right)$ é a energia η_σ fornecido à matéria por unidade de volume e unidade de tempo local σ, se a energia é medida por instrumentos de medida situados nas posições correspondentes. Assim, de acordo com a Eq. (30), $\eta_\tau = \eta_\sigma\left[1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]$ é a energia (medida de maneira análoga) fornecida à matéria por unidade de volume e unidade de tempo local τ. $\frac{1}{8\pi}\left(X^2+....+N^2\right)$ é a energia eletromagnética ε por unidade de volume, medido da mesma forma. Se levarmos em conta que, de acordo com (30), temos que definir $\frac{\partial}{\partial\sigma} = \left[1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]\frac{\partial}{\partial\tau}$, obtemos

$$\int\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]\eta_\tau d\omega + \frac{d}{d\tau}\left\{\int\left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]\varepsilon d\omega\right\} = 0.$$

Essa equação expressa o princípio da conservação de energia e contém um resultado notável. Uma energia, ou injeção de energia, que, medida localmente, tem o valor $E = \varepsilon\ d\omega$ ou $E = \eta\ d\omega\ d\tau$, respectivamente, contribui para a energia total, além do valor E que corresponde à sua magnitude, também um valor $\frac{E}{c^2}\gamma\xi = \frac{E}{c^2}\Phi$, que corresponde à sua posição. Portanto, para cada energia E no campo gravitacional corresponde uma energia de posição que se iguala à energia potencial de uma massa "ponderável" de magnitude $\frac{E}{c^2}$.

Assim, a proposição derivada em §11, na qual a uma quantidade de energia E corresponde uma massa $\frac{E}{c^2}$, é válida não apenas para a massa *inercial*, mas também para a massa *gravitacional*, se a suposição introduzida em §17 for correta.

Correções ao artigo:
"Sobre o princípio da relatividade
e de suas conseqüências"[21]

A. Einstein[30]

Durante a leitura das provas do artigo citado, eu infelizmente esqueci vários erros, que deveriam ter sido corrigidos, pois dificultam a leitura do artigo[31].

Fórmula 15b deveria ser

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi}(YN - ZM)d\omega\right] + \sum \frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = 0.$$

O fator 4/3 na segunda fórmula na página 451 está errado: a fórmula deveria ser

$$G = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\frac{E_0}{c^2}.$$

Fórmula 28 na página 453 deve ser

$$dE = F_x dx + F_y dy + F_z dz - pdV + Td\eta.$$

Algumas linhas depois o subscrito em G_x deve ser adicionado. Na penúltima linha na página 455 deve ser usado "substituível" em vez de "utilizável".

Na página 461 deve ser

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

e

$$\omega_\xi = \left[1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right]u_\xi.$$

Na página 462 os subscritos nas grandezas u_ξ e u_ς devem ser adicionados. Além disso, aproximadamente no meio dessa página um erro de sinal precisa ser corrigido: a equação deve ser:

$$\eta_\sigma = \eta_\tau\left[1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right].$$

Uma carta do senhor Planck induziu-me a acrescentar o seguinte comentário suplementar com o propósito de evitar mal entendidos, que poderiam facilmente ocorrer:

Na seção "princípio da relatividade e gravitação" um sistema referencial em repouso em um campo gravitacional homogêneo, temporariamente constante, é tratado como fisicamente equivalente a um sistema referencial sem gravitação e uniformemente acelerado. O conceito "uniformemente acelerado" necessita um esclarecimento adicional.

Se – como no nosso caso – considerarmos um movimento retilíneo (do sistema Σ), a aceleração é dada pela expressão dv/dt, na qual v significa a velocidade. De acordo com a cinemática em uso até hoje em dia, dv/dt é independente do estado de movimento do sistema referencial (não acelerado), de modo que poder-se-ia falar diretamente de aceleração (instantânea), quando o movimento em um dado elemento de tempo é dado. De acordo com a cinemática por nós utilizada, dv/dt depende sim do estado de movimento do sistema referencial (não acelerado). No entanto, dentre todos os valores de aceleração que podem ser obtidos dessa maneira, para uma determinada época de movimento, esse um se distingue por corresponder a um sistema referencial em relação ao qual o corpo considerado tem velocidade $v = 0$. É esse valor de aceleração que precisa permanecer constante em nosso sistema "uniformemente acelerado". A relação $v = \gamma t$ usada na p. 457 é válida, portanto, apenas em primeira aproximação. Isso, no entanto, é suficiente, porque apenas termos lineares em t e τ, respectivamente, precisam ser levados em conta nessas considerações.

Referências

[1] H.A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der Elektrischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern* (Tentativa de uma Teoria para Fenômenos Elétricos e Ópticos em Corpos em Movimento) Leiden, 1895.

[2] Michelson e E.W. Morley, Amer. J. Science **34**, 333 (1887).

[3] H.A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wet., Amsterdam, 1904.

[4] A. Einstein, Ann. d. Phys. **16** (1905).

[5] M. Laue, Ann. d. Phys. **23**, 989 (1907).

[6] J. Laub, Ann. d. Phys. **32** (1907).

[7] A. Einstein, Ann. d. Phys. **18**, 639 (1905).

[8] A. Einstein, Ann. d. Phys. **23**, 371 (1907).

[9] M. Planck, Sitzungsber. d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. XXIX, 1907.

[10] Kurd von Mosengeil, Ann. d. Phys. **22**, 867 (1907).

[11] J. Stark, Ann. d. Phys **21**, 401 (1906).

[12] M. Laue, Ann. d. Phys **23**, 989 (1907).

[13] W. Kaufmann, "*Über die Konstitution des Elektrons"* (Sobre a constituição do elétron). Ann. d. Phys. **19** (1906).

[14] M. Planck, *Verhandl. d. Deutschen Phys. Ges.* VIII, no. 20 (1906); IX, no 14 (1907).

[15] M. Abraham, *Göttt. Nachr.* 1902.

[16] A.H. Bucherer, *Math. Einfürung in die Elektronentheorie* (Introdução Matemática à Teoria do Elétron), Leipzig, 1904, p. 58.

[17] J. Precht, Ann. d. Phys. **21**, 599 (1906).

[30] Publicado no Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **5**, 98-99 (1908)

[31] Essas correções já estão incluídas na tradução (N.T.)

[18] A. Einstein, Ann. d. Phys. **23**, §2 (1907).

[19] A. Einstein, Ann. d. Phys. **23**, 373 (1907).

[20] M. Planck, *Zur Dynamic bewegter Systeme* (Sobre a dinâmica de sistemas em movimento). Sitzungsber. d. kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch (1907).

[21] Esse atigo.