

MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

Prova 1 — 19/4/2016

Instruções:

- Identifique sua prova na primeira página, com nome e número USP
- Numere as páginas, principalmente se usar mais de uma folha
- A prova pode ser feita a lápis
- As questões podem estar em qualquer ordem

Onde escrever uma demonstração, pode precedê-la por uma argumentação esquemática, como visto em aula, com as idéias e métodos usados. Mas separe de forma clara essa parte da demonstração.

1. Seja A um conjunto. Uma função $f : A \rightarrow A$ é uma *involução* se $f \circ f$ é a função identidade em A (isto é, $f \circ f(x) = \text{id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$). Um elemento $t \in A$ é *ponto fixo* de f se $f(t) = t$.
 - (a) Mostre que toda involução é uma função bijetora.
 - (b) Dados números reais a, b , a expressão $f(x) = ax + b$ define uma função real.
 - i. Para que valores de a, b essa função tem ponto fixo? Descreva, em função desses parâmetros, todos os pontos fixos.
 - ii. Para que valores de a, b essa função é uma involução?
 - iii. Para que valores de a, b essa função é uma involução sem ponto fixo?
2. Suponha que você quer provar que " Se $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_1$ são retas paralelas, então $m_1 = m_2$ ". Quais dessas perguntas são úteis e quais não, para o método do vai-e-vem:
 - (a) Como posso provar que $m_1 = m_2$?
 - (b) Como posso provar que duas linhas são paralelas?
 - (c) Como posso provar que dois números reais são iguais?
3. Prove detalhadamente que se n é a soma de dois inteiros consecutivos, então n^2 é ímpar. Deixe claro quais as definições que usou. Sua prova tem a forma "vai", "vem" ou "vai e vem"?
4. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções dos números reais nos reais. Vamos definir em $\mathcal{F}$ a relação $\prec$ por:

$$f \prec g \text{ se e só se existe um } x_0 \text{ tal que } f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \geq x_0.$$

Por exemplo, $x^2 \prec x^3$ (basta tomar $x_0 = 1$) e $1000x + 100 \prec x^2$ (basta tomar $x_0 = 1001$).

Mostre que $\prec$ é reflexiva e transitiva.