

MAC 414 – Linguagens Formais e Autômatos

Gabarito da Lista 1

1. [L&P 1.7.5] Dê alguns exemplos de cadeias pertencentes e não-pertencentes aos seguintes conjuntos, em que $\Sigma = \{a, b\}$.

- (a) $\{w : \text{para algum } u \in \Sigma\Sigma, w = uu^R u\}$

Como $u \in \Sigma\Sigma$, é possível enumerar todas as possibilidades para u : aa, ab, ba, bb . Como w é da forma $u\rho(u)u$ para algum $u \in \Sigma\Sigma$, temos que $w \in \{aaaaaa, abbaab, baabba, bbbbbb\}$. Claramente, qualquer outra palavra em Σ^* não está no conjunto.

(*E se eu quiser mostrar que um exemplo não está no conjunto?*) A cadeia $w = ababab$ não está no conjunto. Suponha, por contradição, que sim; então existe $u \in \Sigma\Sigma$ tal que $w = u\rho(u)u$; claramente $|u| = 2$, logo u deve ser ab mas $u\rho(u)u = abbaab \neq ababab$. Chegamos a uma contradição, logo w não está no conjunto.

(*Outro exemplo:*) A cadeia $w = aaa$ não está no conjunto. Se uma palavra w' está no conjunto, existe $u \in \Sigma\Sigma$ tal que $w' = u\rho(u)u$. Como $|u| = 2$, temos que $|w'| = |u\rho(u)u| = |u| + |\rho(u)| + |u| = 3|u| = 6$. Mas $|w| = 3$, logo w não está no conjunto.

- (b) $\{w : ww = www\}$

Para uma cadeia w estar no conjunto, $|ww| = |www|$, logo $2|w| = 3|w|$, então $|w| = 0$ e $w = \lambda$. Então, qualquer palavra em $\Sigma^* \setminus \{\lambda\}$ não está no conjunto. (*Argumentar que uma cadeia específica não está no conjunto é trivial.*)

Outro argumento legal que alguém apresentou: se w está no conjunto, $ww = www$, logo $w(ww) = (ww)$, logo w é o elemento neutro da concatenação, isto é, $w = \lambda$.

- (c) $\{w : \text{para algum } u, v \in \Sigma^*, uvw = wvu\}$

Para qualquer $w \in \Sigma^*$, se fizermos $u = w$ e tomarmos v qualquer em Σ^* (ou se fizermos $u = v = \lambda$) temos que $uvw = wvu$. Logo, não há nenhuma cadeia fora do conjunto.

Erros comuns: Essa muita gente errou dizendo, por exemplo, que se $u = abb, v = ba, w = a$ então $uvw = abbbba \neq abaabb = wvu$, logo w não está no conjunto. Note que fixado um w , podemos tomar u e v como quaisquer palavras em Σ^* para tentar satisfazer o predicado do conjunto.

Outros tentaram mostrar exemplos fora do conjunto utilizando símbolos fora de Σ , o que não está correto, uma vez Σ é fixado como o alfabeto sobre o qual w é formado no início da questão.

- (d) $\{w : \text{para algum } u \in \Sigma^*, www = uu\}$

Qualquer cadeia na forma vv , com $v \in \Sigma^*$, está no conjunto: $www = vvvvvv$, e se $u = vvv$, $uu = vvvvvv = www$. Qualquer outra cadeia de Σ^* está fora do conjunto (*note que a argumentação a seguir dispensa a frase anterior*): seja $n = |w|$, $m = |u|$; se $www = uu$ então $3n = 2m$, logo n é par e assim $w = xy$ com $x, y \in \Sigma^*$ e $|x| = |y| = n/2$. Além disso, é fácil ver que $u = wx = xyx$ e $u = yw = yxy$, portanto $xyx = yxy$ e então $x = y$.

Outra resposta OK para "não-pertencente": Nenhuma palavra w tal que $|w|$ é ímpar está no conjunto; nesse caso, $|www| = 3|w|$, logo $|www|$ é ímpar e para qualquer $u \in \Sigma^*$, $|uu| = 2|u|$, que é par, o que contradiz $www = uu$.

Mostrando que uma cadeia específica não pertence: Seja $w = ab$; temos que $www = ababab$. Se existe $u \in \Sigma^*$ tal que $uu = www$, então u tem comprimento 3, então temos que $u = aba$ e $u = bab$, o que é uma contradição. Logo w está fora do conjunto.

Exemplo errado: Se $w = b, u = bb$, então $www = bbb \neq bbbb = uu$, logo w não pertence ao conjunto. *Realmente, w não está no conjunto, mas o argumento está errado; precisa mostrar de alguma forma que, para todo $u \in \Sigma^*$, $www \neq uu$.*

2. [L&P 1.8.3] Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Apresente expressões regulares correspondentes aos seguintes conjuntos:

Nota: Nessa questão, a grande maioria não mostrou que a ER correspondia ao conjunto. Alguns também fizeram uma prova parcial, mostrando apenas que qualquer palavra gerada pela ER está no conjunto (também precisa mostrar a recíproca).

- (a) Todas as cadeias em Σ^* com não mais que três a 's.

$b^*(a + \lambda)b^*(a + \lambda)b^*(a + \lambda)b^*$ ou $b^*(a + ab^*a + ab^*ab^*a + \lambda)b^*$ ou $b^* + b^*ab^* + b^*ab^*ab^* + b^*ab^*ab^*ab^*$.

Prova para a terceira forma: Basta provar que $\alpha = b^*(ab^*)^n$ corresponde à linguagem das palavras com exatamente n ocorrências de a . É trivial ver que cada palavra expressa por α tem n ocorrências de a . Reciprocamente, seja w uma palavra com n ocorrências de a . Então, antes e após cada ocorrência de a , pode existir um número qualquer (inclusive zero) de ocorrências de b , logo $\alpha = b^*(ab^*)^n$ expressa w .

- (b) Todas as cadeias em Σ^* com um número de a 's divisível por três.

$b^*(ab^*ab^*ab^*)^*$.

Vamos provar para uma ER um pouco diferente, que simplifica a argumentação. Seja $\alpha = (b^*ab^*ab^*ab^*)^*b^*$ e $w \in \mathcal{L}(\alpha)$. Então $w = x_1x_2 \dots x_ny$ com $n \geq 0$, $x_i \in (b^*ab^*ab^*ab^*)$ para $i = 1, \dots, n$ e $y \in b^*$. Pelo argumento do item anterior, cada x_i tem 3 ocorrências de a , logo $|w|_a = 3n$, que é múltiplo de 3, para qualquer n natural.

Reciprocamente, seja w uma palavra tal que $|w|_a = 3n$. Se $n = 0$ então $w \in b^*$, logo $w \in \mathcal{L}(\alpha)$. Se $n > 0$, podemos decompor w em subcadeias $w_1, w_2, \dots, w_n$, em que cada w_i (para $i = 1, \dots, n$) tem exatamente 3 a 's. Pelo argumento da questão anterior, $w_i \in (b^*ab^*ab^*ab^*)$. Logo $w \in (b^*ab^*ab^*ab^*)^n$ e portanto $w \in \mathcal{L}(\alpha)$.

Erros comuns: Muita gente colocou a expressão $(b^*ab^*ab^*ab^*)^*$. Note que essa expressão não aceita nenhuma palavra em $\mathcal{L}(b^*)$, sendo que todas essas têm um número de a 's divisível por 3. Acredito que, se vocês tivessem tentado argumentar sobre a correção da ER, encontrariam o erro.

A expressão $b^*(ab^*ab^*a)^*b^*$ não aceita $aaabaaa$.

- (c) Todas as cadeias em Σ^* com, exatamente, uma ocorrência da subcadeia aaa .

$(b + ab + aab)^*aaa(b + ba + baa)^*$.

Seja $\alpha = (b + ab + aab)^*aaa(b + ba + baa)^*$ e w uma palavra da linguagem correspondente a α . Claramente, w contém ao menos uma ocorrência de aaa , explícita em α . Mostremos que qualquer palavra gerada por $(b + ab + aab)^*$ não contém aaa e termina em b se não é vazia (se alguma tal palavra terminasse em a , teríamos uma ocorrência de $aaaa$ e assim pelo menos duas ocorrências de aaa).

Se $x \in (b + ab + aab)^*$ então $x \in (b + ab + aab)^n$, para n natural. Provemos a afirmativa por indução em n : se $n = 0$, $x = \lambda$, que não contém aaa e é vazia (logo não precisa terminar em b). Se $n > 0$, $x = zy$ com $y \in (b + ab + aab)$ e $z \in (b + ab + aab)^{n-1}$; por HI, z termina em b se não é vazia e não tem ocorrências de aaa . Claramente y não tem ocorrências de aaa e termina em b ; como z termina em b se não é vazia, não pode haver uma ocorrência de aaa com parte em z e parte em y ; logo x termina em b e não tem ocorrências de aaa .

Por argumento análogo, qualquer palavra gerada por $(b + ba + baa)^*$ não contém aaa e começa em b se não é vazia. Logo w tem exatamente uma ocorrência de aaa .

Reciprocamente, seja w uma palavra com exatamente uma ocorrência de aaa . Então $w = w_1aaa w_2$, com $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ e w_1 (analogamente, w_2) ou é vazia ou possui no máximo dois a 's consecutivos e termina em b (analogamente, começa em b). Logo cada ocorrência de a ou aa em w_1 (em w_2) é seguida (é precedida) por um b , então w_1 (w_2) pode ser quebrada em subcadeias com apenas um b , ou seja, pode ser escrita como $x_1x_2 \dots x_n$, com $n \geq 0$, em que $x_i \in (b + ab + aab)$ ($x_i \in (b + ba + baa)$), para $i = 1, \dots, n$. Logo $w_1 \in (b + ab + aab)^n$ ($w_2 \in (b + ba + baa)^n$), e portanto $w \in (b + ab + aab)^*aaa(b + ba + baa)^*$.

Erros: $(a + b)^*aaa(a + b)^*$ aceita $aaaa$; $(b^* + b^*a + b^*aa)^*aaa(b^* + b^*a + b^*aa)^*$ aceita $aaaa$. Essa realmente era a mais difícil, e muita gente fez errado de muitas formas diferentes.

3. [L&P 1.8.5] Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Explique.

(a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$

Verdadeiro: $baa = (\lambda)(b)(aa)(\lambda)$ e $\lambda \in a^*$, $b \in b^*$, $aa \in a^*$ e $\lambda \in b^*$, logo $baa \in a^*b^*a^*b^*$.

(b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$

Verdadeiro. Precisamos provar que $b^*a^* \cap a^*b^* \supseteq a^* \cup b^*$ e $b^*a^* \cap a^*b^* \subseteq a^* \cup b^*$.

($\supseteq$) Se $w \in a^*$, então $w = \lambda w \in b^*a^*$ e $w = w\lambda \in a^*b^*$, logo $w \in b^*a^* \cap a^*b^*$. Analogamente, se $w \in b^*$, então $w \in b^*a^* \cap a^*b^*$. Portanto, $a^* \cup b^* \subseteq b^*a^* \cap a^*b^*$.

($\subseteq$) Seja $w \in b^*a^* \cap a^*b^*$. Suponhamos, por contradição, que $w \notin a^* + b^*$. Logo w possui ao menos um a e ao menos um b . Como $w \in b^*a^*$, então qualquer b vem antes de um a ; mas $w \in a^*b^*$, logo qualquer a vem antes de um b , o que é uma contradição. Logo $w \in a^* + b^*$ e assim $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$.

Erros: Muitos provaram apenas uma das inclusões.

(c) $a^*b^* \cap b^*c^* = \emptyset$

Falso. Obviamente, $\lambda \in a^*b^*$ e $\lambda \in b^*c^*$, logo $\lambda \in a^*b^* \cap b^*c^*$ e assim $a^*b^* \cap b^*c^* \neq \emptyset$. (*A interseção é b^* , mas não vou mostrar aqui. Você também poderia mostrar que b ou bb está no conjunto, por exemplo.*)

(d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

Falso. Se $w \in (a(cd)^*b)^*$ e $w \neq \lambda$, então $w \in (a(cd)^*b)^n$, com $n > 0$. Logo w termina com um b , o que não ocorre em $abcd$.

4. Dê exemplos de linguagens não-vazias A, B e C sobre $\Sigma = \{a, b\}$ tais que

(a) $AB = AC$, mas $B \neq C$

(Muita gente usou esse mesmo exemplo) Sejam $A = a^*$, $B = b$ e $C = a^*b$. Claramente, $B \neq C$, mas $AB = a^*b = a^*a^*b = AC$.

(b) $A(B \cap C) \neq AB \cap AC$

Sejam $A = \{a, ab\}$, $B = \{ba\}$ e $C = \{a\}$. Claramente, $B \cap C = \emptyset$, logo $A(B \cap C) = A\emptyset = \emptyset$. Mas $AB = \{aba, abba\}$ e $AC = \{aa, aba\}$, logo $AB \cap AC = \{aba\} \neq \emptyset = A(B \cap C)$.

Erros: Algumas pessoas utilizaram as linguagens $A = a^*$, $B = a$ e $C = \lambda$. Note que $AB = a^*a \neq a^* = AC$; vê-se que $\lambda \in AC$, mas $\lambda \notin AB$, já que cadeias em a^*a têm ao menos um a . Algumas pessoas (mais de uma) disseram que $a^*a = a^*$ e ainda disseram que o professor mostrou isso em sala!

Uma das inclusões $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ ou $AB \cap AC \subseteq A(B \cap C)$ é sempre válida. Prove-a.

A inclusão $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ é sempre válida. Se $x \in A(B \cap C)$, então $x = ay$, com $a \in A$ e $y \in B \cap C$. Nesse caso, $y \in B$ e $y \in C$, logo $ay \in AB$ e $ay \in AC$. Portanto $x \in AB \cap AC$, como queríamos demonstrar.

5. Seja $L = \{x \in \{0, 1\}^* : |x|_0 \neq |x|_1\}$. Prove que

(a) $L^* = \{0, 1\}^*$

Pela definição de L , temos que $L \subseteq \{0, 1\}^*$. Sabe-se que $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$, logo $L^* \subseteq \{0, 1\}^{**} = \{0, 1\}^*$.

Reciprocamente, $0 \in L$, já que $|0|_0 = 1 \neq 0 = |0|_1$; além disso, $1 \in L$, já que $|1|_0 = 0 \neq 1 = |1|_1$. Logo $\{0, 1\} \subseteq L$ e assim $\{0, 1\}^* \subseteq L^*$.

Então $L^* = \{0, 1\}^*$.

(b) $\bar{L}^* = \bar{L}$. Obs.: $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$, é o complemento de L .

Note que $\bar{L} = \{x \in \{0, 1\}^* : |x|_0 = |x|_1\}$. Pela definição da estrela de Kleene, temos que $\bar{L} \subseteq \bar{L}^*$. Resta mostrar que $\bar{L}^* \subseteq \bar{L}$.

Se $w \in L^*$, então $w \in L^n$, para algum n natural. Se $n = 0$, então $w = \lambda$, mas $|\lambda|_0 = 0 = |\lambda|_1$, logo $\lambda \in \bar{L}$. Se $n > 0$, então $w = w_1 w_2 \dots w_n$, com $w_i \in L$ para $i = 1, \dots, n$. Mas $|w|_0 = \sum_{i=1}^n |w_i|_0 = \sum_{i=1}^n |w_i|_1 = |w|_1$, já que $|w_i|_0 = |w_i|_1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo $w \in \bar{L}$ e $\bar{L}^* \subseteq \bar{L}$, como queríamos mostrar.

Erros: Algumas pessoas mostraram a segunda inclusão tomando $x, y \in \bar{L}$ e mostrando que $xy \in \bar{L}$. Isso não prova que $\bar{L}^* \subseteq \bar{L}$, apenas que $\bar{L}^2 \subseteq \bar{L}$. No entanto, argumento semelhante poderia ser utilizado numa prova por indução (alguns fizeram assim).