MAT138 - Álgebra I para Computação - IME - 2010

Prova 2

1. (Valor: 3.0 pontos) Encontre o menor quadrado perfeito que deixa resto 1 quando dividido por 7 e cujo dobro deixa resto 3 quando dividido por 5. Existem infinitos quadrados perfeitos que satisfazem essas condições?

2. (Valor: 2.5 pontos) Encontre, caso existam, todas as soluções $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ do sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y \equiv -2 \mod 5 \\ 2x + 3y \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

3. (Valor: 2.5 pontos) Um estudante investigou as propriedades de divisibilidade por 5 de $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$. Usando uma calculadora ele montou a tabela abaixo, onde os valores já estão calculados módulo 5:

n	1^n	2^n	3^n	4^n	S_n
0	1	1	1	1	4
1	1	2	3	4	0
2	1	4	4	1	0
3	1	3	2	4	0
4	1	1	1	1	4
5	1	2	3	4	0
6	1	4	4	1	0
7	1	3	2	4	0
8	1	1	1	1	4

O estudante conjecturou que $S_n \equiv 0 \mod 5$ se, e somente se, n não for divisível por 4. Prove essa afirmação.

4. (Valor: 2.0 pontos) Sabe-se que $p = 4423$ é um número primo e que $M(p) = 2^p - 1$ é um primo de Mersenne que tem 1332 dígitos. Encontre o menor resíduo positivo de

$$4423^{10^{5674}}$$

módulo $M(p)$.

$2^{4422} \cdot 2 - 1$ $\qquad$ $4423 \equiv n$

1

$4423 \mid 2^{4422} - 1$ $\qquad$ $2^{4423} - 1 \equiv 1 \mod 4423$

$2(2^{4422} - 1) \equiv 0 \mod 4423$