

MAT0421 – PROJETO 2

TENTATIVAS DE PROVAS DO QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

Nos exercícios abaixo são apresentadas diversas tentativas de provas do quinto postulado de Euclides a partir dos resultados válidos na geometria neutra plana. Analise cada uma delas justificando cuidadosamente cada passo descrito e identifique a sua falha.

1. O argumento a seguir prova a existência de um triângulo com defeito nulo. Dado um ângulo agudo XOY , considere um ponto $B \in \overrightarrow{OX} - \{O\}$ e seja A a projeção ortogonal de B sobre $\overrightarrow{OY}$. Então $A \in \overrightarrow{OY} - \{O\}$. Tem-se $d = \delta(\triangle OAB) \geq 0$. Suponha, por absurdo, que $d > 0$. Se A_1 é tal que A é ponto médio do segmento OA_1 então $\triangle OAB \cong \triangle A_1AB$. Sendo $B_1 \in \overrightarrow{OB}$ tal que $\overrightarrow{A_1B_1} \perp \overrightarrow{OA}$ conclui-se que $\delta(\triangle OA_1B_1) \geq 2d$. Repetindo esta construção para o triângulo OA_1B_1 obtém-se um triângulo OA_2B_2 tal que $\delta(\triangle OA_2B_2) \geq 2^2d$. Após n etapas, obtém-se um triângulo OA_nB_n tal que $\delta(\triangle OA_nB_n) \geq 2^nd$. Tomando-se n de modo que $2^nd \geq 180$, segue $\delta(\triangle OA_nB_n) \geq 180$ contrariando a definição do defeito. Assim, $\delta(\triangle OAB) = 0$.

2. A seguinte prova da unicidade da paralela foi elaborada por Farkas Bolyai, pai de Janos Bolyai. Dados uma reta r e um ponto P fora de r , seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r . Tem-se $r \parallel s$. Sendo t uma reta arbitrária passando por P , t distinta de s e de $\overrightarrow{PQ}$, devemos mostrar que t e r se intersectam. Seja A um ponto tal que $P - A - Q$. Sendo B e C os simétricos de A em relação às retas r e t , respectivamente, como A, B e C são pontos não colineares, segue que existe uma circunferência Γ que os contém. Porém, r e t são as mediatrizes dos segmentos AB e AC , respectivamente, e, portanto, r e t se intersectam no centro de Γ . Logo, s é a única reta que passa por P e é paralela a r .

3. Nesta prova o argumento é parecido com a tentativa elaborada pelo grego Proclus, porém, a falha é diferente. Dados uma reta r e um ponto P fora de r , seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r . Sabe-se que $r \parallel s$. Sendo t uma reta arbitrária passando por P , t distinta de s e de $\overrightarrow{PQ}$, devemos mostrar que t e r se intersectam. Escolha $X \in s$ e $Y \in t$, com X e Y distintos de P , tais que $Y \in \text{int}(\angle QPX)$. Se H_1 é um ponto arbitrário pertencente ao conjunto $\overrightarrow{PY} - \{P\}$ e J_1 é a projeção ortogonal de H_1 sobre $\overrightarrow{PQ}$, então $J_1 \in \overrightarrow{PQ} - \{P\}$ e PJ_1 cresce indefinidamente à medida que H_1 se afasta de P . Portanto, existe $H \in \overrightarrow{PY} - \{P\}$ tal que, se J é a projeção ortogonal de H sobre $\overrightarrow{PQ}$, então $J \in \overrightarrow{PQ} - \{P\}$ com $PJ > PQ$. Segue que H e J estão do mesmo lado de r enquanto que J e P estão em lados opostos de r . Logo, H e P estão em lados opostos de r e, portanto, t e r se intersectam. Conclui-se que s é a única reta que passa por P e é paralela a r .

4. O argumento apresentado por Aganis (século VI) inicia pela demonstração de um caso particular do quinto postulado de Euclides. Suponha que $\overrightarrow{BC}$ é uma transversal a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ de modo que A e D estão do mesmo lado de $\overrightarrow{BC}$, $\angle ABC$ é um ângulo agudo e $\angle DCB$ é um ângulo reto. Sendo E a projeção ortogonal de A sobre $\overrightarrow{BC}$, suponha, sem perda de generalidade, $B - E - C$. Considere F tal que $B - F - E$ e $BC = 2^n BF$ para algum inteiro positivo n . A reta que passa por F e é perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ intersecta $\overrightarrow{BA}$ em G . Sendo H tal que $B - G$

– H e $BH = 2^n BG$, tem-se que $\overrightarrow{BA}$ intersecta $\overrightarrow{CD}$ em H . A partir da comprovação desta situação especial segue o quinto postulado de Euclides na sua forma original.

5. A seguinte prova do quinto postulado de Euclides é atribuída a Joseph D. Gergonne. Dados uma reta r e um ponto P fora de r , seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r . Tem-se $r \parallel s$. Escolha $A \in s$, A distinto de P . Seja $B \in r$, com A e B do mesmo lado de $\overrightarrow{PQ}$, tal que $\overrightarrow{PB}$ é a última semirreta entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PA}$ que intersecta r . Sendo $C \in r$ de modo que $Q - B - C$ tem-se que $\overrightarrow{PC}$ intersecta r e, portanto, $\overrightarrow{PB}$ não é a última semirreta entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PA}$ que intersecta r . Logo, todas as semirretas entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PA}$ intersectam r e conclui-se que s é a única reta que passa por P e é paralela a r .

6. Em 1809, Bernhard Friedrich Thibaut tentou provar o quinto postulado de Euclides com o seguinte argumento. Dado um triângulo ABC orientado positivamente, sejam D , E e F tais que $B - A - D$, $A - C - E$ e $C - B - F$. A rotação, no sentido horário, de centro A e ângulo DAC transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{AC}$. A rotação, no sentido horário, de centro C e ângulo ECB transforma $\overrightarrow{AC}$ em $\overrightarrow{BC}$. Finalmente, a rotação, no sentido horário, de centro B e ângulo FBA transforma $\overrightarrow{BC}$ em $\overrightarrow{AB}$. Efetuadas as três rotações, tem-se que $\overrightarrow{AB}$ foi transformada em si mesma e, portanto, a soma das medidas em graus dos ângulos de rotação é igual a 360. Logo, $[180 - m(\angle A)] + [180 - m(\angle C)] + [180 - m(\angle B)] = 360$ e conclui-se que a soma das medidas em graus dos três ângulos do triângulo ABC é igual a 180.

7. Esta prova do quinto postulado de Euclides foi apresentada por J. K. F. Hauff em 1819. Sejam $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ as alturas de um triângulo equilátero ABC e O o ponto onde essas alturas se intersectam. No triângulo ADC tem-se $m(\angle CAD) = \frac{1}{2} m(\angle ACD)$ de modo que, no triângulo AOE , $m(\angle OAE) = \frac{1}{2} m(\angle AOE)$. Um resultado análogo vale para cada um dos seis triângulos retângulos menores nas quais $\triangle AOE$ é típico. Segue-se que a soma das medidas em graus dos três ângulos do triângulo ABC é igual à metade da soma das medidas em graus dos ângulos em torno de O , ou seja, é igual a 180.

8. É impressionante a obstinação com que Adrian-Marie Legendre perseguiu uma prova para o quinto postulado de Euclides. Esta é uma de suas várias tentativas. Dados uma reta r e um ponto P fora de r , seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r . Tem-se $r \parallel s$. Sendo t uma reta arbitrária passando por P , t distinta de s e de $\overrightarrow{PQ}$, devemos mostrar que t e r se intersectam. Escolha $X \in s$ e $Y \in t$, com X e Y distintos de P , tais que $Y \in \text{int}(\angle QPX)$. Considere um ponto Z , com Y e Z em lados opostos de $\overrightarrow{PQ}$, tal que $\angle QPY \cong \angle QPZ$. Como $Q \in \text{int}(\angle YPZ)$ e r é uma reta que passa por Q , segue-se que r intersecta ou $\overrightarrow{PY}$ ou $\overrightarrow{PZ}$. Se r intersecta $\overrightarrow{PY}$ então t e r se intersectam. Se r intersecta $\overrightarrow{PZ}$ num ponto A , considere $B \in \overrightarrow{PY}$ tal que $\overrightarrow{PA} \cong \overrightarrow{PB}$. Então $\triangle PQA \cong \triangle PQB$ de modo que $\angle PQB$ é um ângulo reto. Portanto, $B \in r$ e, novamente, t e r se intersectam. Conclui-se que s é a única reta que passa por P e é paralela a r .

9. Esta tentativa de prova foi apresentada por Legendre em 1794. Dado um triângulo ABC , sejam $x = AB$, $\alpha = m(\angle A)$ e $\beta = m(\angle B)$. A medida angular $\gamma = m(\angle C)$ é unicamente determinada por α , β e x de modo que pode-se escrever $\gamma = f(\alpha, \beta, x)$. Se ângulos retos têm

medidas angulares iguais a 1 então γ é um número entre 0 e 2. Como x é um número que depende da escolha de um segmento unidade, a expressão para γ não pode, na realidade, conter x e, portanto, $\gamma = f(\alpha, \beta)$. Observe que, na geometria euclidiana, $f(\alpha, \beta) = 2 - \alpha - \beta$. Sendo D o ponto médio do segmento AB , existe uma única semirreta DE , com E e C do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $\angle ABC \cong \angle ADE$. Então $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e podemos supor $E \in \overleftrightarrow{CA}$. Como $\gamma = f(\alpha, \beta)$ para qualquer triângulo, segue que $\angle AED \cong \angle ACB$, ou seja, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Obtém-se, assim, a existência de um par de triângulos semelhantes e não congruentes. Este fato é equivalente ao quinto postulado de Euclides.

10. Esta é a última tentativa de prova do quinto postulado de Euclides apresentada por Legendre, publicada na edição final do seu texto *Eléments de Géométrie*. Considere um triângulo ABC e suponha, sem perda de generalidade, $AB \geq AC \geq BC$. Seja $d = \delta(\triangle ABC)$. Sendo D o ponto médio do segmento BC , sejam $C_1 \in \overleftrightarrow{AD}$, $E \in \overleftrightarrow{AB}$ e $B_1 \in \overleftrightarrow{AB}$ tais que $AC_1 = AB$, $AE = AD$ e $AB_1 = 2AD$. Então $\triangle AC_1E \cong \triangle ABD$ e $\triangle B_1C_1E \cong \triangle ACD$. Obtém-se, assim, um triângulo AB_1C_1 tal que $AB_1 \geq AC_1 \geq B_1C_1$, $\delta(\triangle AB_1C_1) = \delta(\triangle ABC)$ e $m(\angle C_1AB_1) \leq \frac{1}{2} m(\angle CAB)$. Aplicando-se sucessivamente essa construção obtém-se, para cada inteiro positivo n , um triângulo AB_nC_n tal que $AB_n \geq AC_n \geq B_nC_n$, $\delta(\triangle AB_nC_n) = d$ e $m(\angle C_nAB_n) \leq \frac{1}{2^n} m(\angle CAB)$. Mas, quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $m(\angle C_nAB_n)$ e $m(\angle AB_nC_n)$ tendem para 0 enquanto que C_n aproxima-se de $\overleftrightarrow{AB}$. Logo, $m(\angle B_nC_nA)$ converge para 180 e, portanto, $d = 0$.

