

CÁLCULO PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS I (IME-USP)
PROVA 1

PROFESSOR: CRISTIÁN ORTIZ

Cada questão vale 2,5 pontos. Justifique suas respostas de forma detalhada e clara. Toda vez que usar algum resultado visto em aula ou nas listas, mencione de forma clara qual resultado você está usando. Boa prova!

- (1) Considere a curva $\alpha(t) = (r\sin(t), r\cos(t), ht)$ para $t \in [0, \infty)$ e $r, h \in \mathbb{R}$ constantes positivas.
- Calcule o comprimento de α entre 0 e algum parâmetro $s > 0$.
 - A curva α está parametrizada pelo comprimento de arco? Caso sim, explique porque, caso não, explique porque e reparametrize a curva pelo comprimento de arco.
- (2) Considere a função de duas variáveis

$$f(x, y) = \frac{e^{(x+cy)} - e^{(x-cy)}}{2},$$

onde c é uma constante. Prove que f é diferenciável em todo ponto e calcule a aproximação linear de f num ponto $a = (a_1, a_2)$.

- (3) Vimos em aula que se $f : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que possui derivadas parciais de ordem 2 em cada ponto, então o Laplaciano de f se define como a função $\Delta(f) : X \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta(f)(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial z^2}$. Diremos que f é **harmônica** se $\Delta(f)(x) = 0$ para cada $x \in B(x_0, r)$. Prove que as funções $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ e $g(x, y) = e^x \sin(y)$, são harmônicas em cada ponto do seu domínio.
- (4) Considere k pontos $A_1 = (a_1, b_1), \dots, A_k = (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ e números reais $m_1, \dots, m_k$ com $m_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, k$. Defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^k m_i \|(x, y) - (a_i, b_i)\|^2,$$

Encontre os pontos críticos de f . Calcule o valor de f em cada ponto crítico. Interprete geometricamente seu resultado.